Devoir surveillé n° 1

Durée : 1 heure

Nom : Prénom :

Rappel

La somme de deux fonctions croissantes sur un intervalle I est croissante sur I.

Exercice 1 (4 points)

1/ Les fonctions f et g, définies sur l'ensemble le plus grand possible, sont-elles égales ?

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ et $g(x) = x + 3$ b) $f(x) = \sqrt{(x+4)^2}$ et $g(x) = x + 4$

2/ Déterminer le domaine de définition de $f \circ g$ puis l'expression de $f \circ g(x)$:

a) f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et g sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

b) f est définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$ et g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3 - x^2$

Exercice 2 (4 points)

1/ **Démonstration de cours**

Soit u une fonction définie sur un intervalle J. Soit v une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, $v(x) \in J$.

Démontrer que si v est décroissante sur I et u est décroissante sur J alors $u \circ v$ est croissante sur I.

2/ **Application**

Le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-1 ; 5]$ est donné ci-dessous :

x	-1		2		3		5
Variations de f	-1	↘	-2	↗	0	↗	3

Déterminer l'ensemble de définition puis dresser le tableau de variation de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Justifier pour un des intervalles.

Exercice 3 (5 points)

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$k(x) = \frac{2x^2 - x - 4}{x}$$

1/ Démontrer que pour tout $x \neq 0$, $k(x) = 2x - 1 - \dfrac{4}{x}$

2/ Déterminer les variations de $h : x \mapsto -\frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$ (Justifier).

3/ En déduire les variations de k sur $]0; +\infty[$ (Justifier).

4/ Démontrer que pour tout $x \neq 0$, $k(x) + k(-x) = -2$.

5/ Que peut-on déduire de la question précédente concernant la courbe représentative de k dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (aucune justification n'est demandée) ?

Exercice 4 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On donne ci-dessous les tableaux de variations respectifs de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	3	$\nearrow$	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

1/ Soit $h = f + g$. Sur quel intervalle peut-on déterminer les variations de h sans plus de renseignements ?

On déterminera les variations de h sur cet intervalle.

2/ Soit $k : x \mapsto -g(x)$, $l : x \mapsto g(x)+2$ et $m : x \mapsto g(x+2)$.

a) Comment obtenir les courbes représentatives de k, l et m en fonction de celle de g ?

b) En déduire les tableaux de variations de k, l et m.

3/ Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 1/2 point et l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

a) Le tableau de variations de $\varphi = g \circ f$ est :

☐

x	$-\infty$		3		$+\infty$
φ		$\searrow$	0	$\nearrow$	

☐

x	$-\infty$		4		$+\infty$
φ		$\searrow$	0	$\nearrow$	

☐

x	$-\infty$		4		$+\infty$
φ		$\searrow$	3	$\nearrow$	

☐

x	$-\infty$		3		$+\infty$
φ		$\searrow$	4	$\nearrow$	

b) Parmi les fonctions suivantes, quelle est la seule susceptible de correspondre à la fonction f ?

- ☐ $x \mapsto 3x + 1$
- ☐ $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 5$
- ☐ $x \mapsto 7 - x$
- ☐ $x \mapsto 2x - 5$

c) Parmi les fonctions suivantes, quelle est la seule susceptible de correspondre à la fonction g ?

- ☐ $x \mapsto x^2 - 3$
- ☐ $x \mapsto (x-3)^2$
- ☐ $x \mapsto (x-3)^2 + 1$
- ☐ $x \mapsto 2 - \frac{6}{x}$

d) Pour tout réel x, $g \circ f(x) =$

- ☐ $4x^2 - 20x + 22$;
- ☐ $2x^2 - 12x + 13$;
- ☐ $2x^2 - 11$;
- ☐ $4x^2 - 32x + 64$.