Devoir surveillé n° 1

Éléments de correction

Exercice 1

1/ a) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$ donc $f \neq g$

b) $f(-5) = \sqrt{(-5+1)^2} = 1$ et $g(-5) = -5+4 = -1$ donc $f \neq g$

2/ a) $x \in \mathscr{D}_{f\circ g} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathscr{D}_g \\ g(x) \in \mathscr{D}_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \frac{1}{x+1} \in \mathbb{R}^* \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Ainsi $\mathscr{D}_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\forall x \in \mathscr{D}_{f\circ g},\ f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{x+1}} = x+1$$

b)

$$x \in \mathscr{D}_{f\circ g} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathscr{D}_g \\ g(x) \in \mathscr{D}_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 3-x^2 \in [-1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow 3-x^2 \geqslant -1 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 4$$

$$\Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$$

Ainsi $\mathscr{D}_{f\circ g} = [-2;2]$

$\forall x \in \mathscr{D}_{f\circ g},\ f \circ g(x) = f(g(x)) = f(3-x^2) = \sqrt{3-x^2+1} = \sqrt{4-x^2}$

Exercice 2

1/ Voir cours

2/ Soit i la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $i(x) = \dfrac{1}{x}$. On a alors $g = i \circ f$.

$$x \in \mathscr{D}_g \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathscr{D}_f \\ f(x) \in \mathscr{D}_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1\ ;\ 5] \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1\ ;\ 5] \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Ainsi $\mathscr{D}_g = [-1\ ;\ 3[\cup]3\ ;\ 5]$

f est strictement décroissante sur $[-1\ ;\ 2]$ et à valeurs dans $[-2\ ;\ -1]$ et i est strictement décroissante sur $[-2\ ;\ -1]$. La fonction $g = i \circ f$ est donc strictement croissante sur $[-1\ ;\ 2]$.

En utilisant le même raisonnement sur les intervalles $[2\ ;\ 3[$ et $]3\ ;\ 5]$, on obtient le tableau suivant :

x	-1		2		3		5
g	-1	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	‖	↘	$\frac{1}{3}$

Exercice 3

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$k(x) = \frac{2x^2 - x - 4}{x}$$

1/ $\forall x \neq 0,\ k(x) = \dfrac{2x^2-x-4}{x} = \dfrac{2x^2}{x} - \dfrac{x}{x} - \dfrac{4}{x} = 2x - 1 - \dfrac{4}{x}$

2/ La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et $-4 < 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

3/ La fonction affine $x \mapsto 2x - 1$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ car $2 > 0$. k est donc la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0; +\infty[$, elle est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

4/ $\forall x \neq 0$, $k(x) + k(-x) = 2x - 1 - \dfrac{4}{x} + 2(-x) - 1 - \dfrac{4}{-x} = 2x - 1 - \dfrac{4}{x} - 2x - 1 + \dfrac{4}{x} = -2.$

5/ Le milieu I du segment formés par les points de la courbe $M(x; k(x))$ et $M'(-x; k(-x))$ a pour coordonnées $(0; -2)$. M et M' sont donc symétriques par rapport à I. I est donc centre de symétrie de la courbe représentative de k.

Exercice 4

1/ Les fonctions f et g sont strictement croissantes sur $[3; +\infty[$. La fonction $h = f + g$ est donc strictement croissante sur $[3; +\infty[$.

2/ a) On appelle $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_k$, $\mathscr{C}_l$ et $\mathscr{C}_m$ les courbes représentant les fonctions g, k, l et m.
- $\mathscr{C}_k$ est l'image de $\mathscr{C}_g$ par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
- $\mathscr{C}_l$ est l'image de $\mathscr{C}_g$ par la translation de vecteur $2\vec{\jmath}$.
- $\mathscr{C}_m$ est l'image de $\mathscr{C}_g$ par la translation de vecteur $-2\vec{\imath}$.

b) On en déduit les tableaux suivants :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
k		$\nearrow$	0	$\searrow$	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
l		$\searrow$	2	$\nearrow$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
m		$\searrow$	0	$\nearrow$	

3/ a) Le tableau de variations de $\varphi = g \circ f$ est :

☐

x	$-\infty$		3		$+\infty$
φ		$\searrow$	0	$\nearrow$	

☒

x	$-\infty$		4		$+\infty$
φ		$\searrow$	0	$\nearrow$	

☐

x	$-\infty$		4		$+\infty$
φ		$\searrow$	3	$\nearrow$	

☐

x	$-\infty$		3		$+\infty$
φ		$\searrow$	4	$\nearrow$	

b) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est susceptible de correspondre à f ?

☐ $x \mapsto 3x + 1$ ☐ $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 5$

☐ $x \mapsto 7 - x$ ☒ $x \mapsto 2x - 5$

c) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est susceptible de correspondre à g ?

☐ $x \mapsto x^2 - 3$ ☒ $x \mapsto (x - 3)^2$

☐ $x \mapsto (x - 3)^2 + 1$ ☐ $x \mapsto 2 - \frac{6}{x}$

d) Pour tout réel x, $g \circ f(x) =$

☐ $4x^2 - 20x + 22$; ☐ $2x^2 - 12x + 13$;

☐ $2x^2 - 11$; ☒ $4x^2 - 32x + 64$.