Des repères pour démontrer

Éléments de correction

Remarque : Pour déterminer les coordonnées d'un point M défini par une relation vectorielle dans un repère $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$ on peut exprimer $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$ ou traduire sur les coordonnées la relation vectorielle qui définit M. Ces deux méthodes sont utilisées dans la suite.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un tétraèdre et I le milieu de $[BC]$. J est le point tel que $ADCJ$ soit un parallélogramme. Le point K est défini par $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
Démontrer que la droite (BK) est parallèle au plan (AIJ).

On se place, par exemple, dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)$. On a :

- $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$ et $D(0;0;1)$.
- I est le milieu de $[BC]$ donc $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.
- $ADCJ$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$ donc $J(0;1;-1)$.
- $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ donc $K(2;0;1)$.

On a ainsi $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

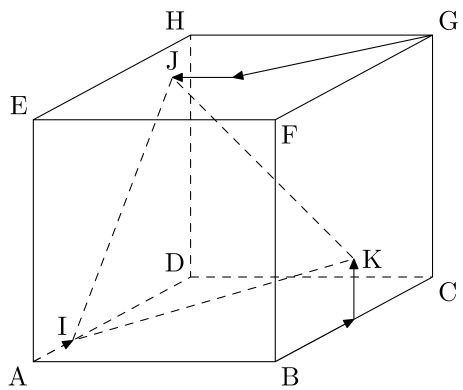
On obtient simplement que ces vecteurs sont coplanaires ($\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AJ}$). On en déduit que la droite (BK) est parallèle au plan (AIJ).

Exercice 3

Soit $ABCDEFGH$ un cube. On définit les points I, J et K de la façon suivante :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\qquad \overrightarrow{GJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{GH}\qquad \overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$$

Démontrer que IJK est un triangle équilatéral.



On se place, par exemple, dans le repère orthonormal $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$. On a :

- $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$.
- $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ donc $I\left(0;\frac{1}{4};0\right)$.
- Cherchons les coordonnées de J en traduisant l'égalité vectorielle qui le définit :

$\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GE}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GJ}\begin{pmatrix}x_J-1\\y_J-1\\z_J-1\end{pmatrix}$

On en déduit $\begin{cases}x_J-1=-\frac{3}{4}\\y_J-1=-\frac{1}{2}\\z_J-1=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}x_J=\frac{1}{4}\\y_J=\frac{1}{2}\\z_J=1\end{cases}$ ainsi $J\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2};1\right)$

- Cherchons les coordonnées de K en exprimant $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs de la base : $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ donc $K\left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$

On calcule alors les longueurs IJ, IK et JK. On obtient $IJ=IK=JK=\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ donc IJK est un triangle équilatéral.

Exercice 4

Soit $ABCDEFGH$ un cube. Soit I le milieu de $[BE]$ et J le milieu de $[FG]$.
Démontrer que la droite (ID) est orthogonale au plan (IJB)

On se place, par exemple, dans le repère orthonormal $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$. On a :

- $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$.
- I est le milieu de $[BE]$ donc $I\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$.
- J est le milieu de $[FG]$ donc $J\left(1;\dfrac{1}{2};1\right)$

Démontrons que (ID) est perpendiculaire à (IJ) et (IB).

$\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc $ID^2=\dfrac{3}{2}$

- $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc $IJ^2=\dfrac{3}{4}$ et $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ donc $DJ^2=\dfrac{9}{4}$

  On a donc $DJ^2=ID^2+IJ^2$ donc IJD est rectangle en I donc $(ID)\perp(IJ)$
- $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc $IB^2=\dfrac{1}{2}$ et $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ donc $DB^2=2$

  On a donc $DB^2=ID^2+IB^2$ donc IBD est rectangle en I donc $(ID)\perp(IB)$

La droite (ID) est donc perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (BIJ), elle est donc orthogonale au plan (BIJ).