Les vecteurs

Le point de vue analytique

Coordonnées d'un vecteur, du milieu, distance

Soit un repère quelconque $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$:

- les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vérifient :

  notation matricielle : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

- les coordonnées de I milieu de [AB] :

$$\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$$

- ⚠ Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a :

$$||\overrightarrow{AB}|| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Application du déterminant

Soit les points $M\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $N\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = \begin{vmatrix} 5-(-1) & 3-(-1) \\ 10-1 & 7-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 36 - 36 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires et donc les points M, N et P sont alignés.

Test de colinéarité

Soit un repère quelconque $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ tel que :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Remarque : les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi leurs coordonnées sont proportionnelles

Opération avec la notation matricielle

Soit un repère quelconque $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit k un réel.

Soit deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

- $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
- $k\vec{u} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$
- $\vec{u} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Application équations de droites

Soit les droites d et d' d'équations respectives : $d\ :\ 7x - 3y + 2 = 0$ et $d'\ :\ 5x - 2y - 8 = 0$.

Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de d et d'.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1$$

Comme $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et donc les droites d et d' sont sécantes

Équation cartésienne d'une droite

Soit un repère quelconque $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit un point $A(x_A\,;\,y_A)$ et un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point quelconque de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. On a alors :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0$$
$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

La droite d a pour équation : $ax + by + c = 0$
avec $c = -(ax_A + by_A)$