

Exercice 1

On donne $A(2 ; -1 ; 3)$, $B(1 ; 2 ; 0)$, $C(-2 ; 1 ; 2)$ et $D(-1 ; -2 ; 5)$.

- 1) $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Un rectangle ?
- 2) Calculer les coordonnées de l'isobarycentre du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 2

On donne $A(-3 ; 1 ; 4)$, $B(-2 ; -1 ; 7)$, $C(-4 ; -1 ; -2)$ et $D(-5 ; -5 ; 4)$.

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Exercice 3

On donne $A(1 ; 1 ; 3)$, $B(\sqrt{2} + 1 ; 0 ; 2)$ et $C(\sqrt{2} + 1 ; 2 ; 2)$.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 4

On donne $A(1 ; -2 ; 3)$, $B(0 ; 4 ; 4)$ et $C(4 ; -20 ; 9)$.

Les points A , B et C sont-ils alignés ?

Exercice 5

$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a . On note G son centre de gravité.

- 1) Démontrer que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2}$$

et qu'il en est de même pour les autres sommets.

- 2) Démontrer que deux arêtes opposées sont orthogonales.
- 3) Soit A' le centre de gravité du triangle BCD . Exprimer \overrightarrow{AG} en fonction de $\overrightarrow{AA'}$.

Exercice 6

$ABCDEFGH$ est un cube de côté égal à 1. On considère le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- 1) Calculer la longueur CE .
- 2) Calculer les coordonnées du centre de gravité I de AHF et du centre de gravité J de BDG .
- 3) Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (AHF) ainsi qu'au plan (BDG) .
Rappel : pour montrer qu'une droite (d) est orthogonale à un plan P , on montre qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- 4) Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

Exercice 7

$ABCD$ est un tétraèdre. On note I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.

On définit les points P , Q , R et S par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD};$$

$$\overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}.$$

Le but de ce problème est de démontrer que les droites (PS) , (QR) et (IJ) sont concourantes.

- 1) Faire une figure.
- 2) Démontrer que :
 - a) P est le barycentre de $(A ; 2)$ et $(B ; 1)$;
 - b) Q est le barycentre de $(A ; 2)$ et $(D ; 1)$;
 - c) R est le barycentre de $(C ; 2)$ et $(B ; 1)$;
 - d) S est le barycentre de $(C ; 2)$ et $(D ; 1)$.
- 3) On considère le point G barycentre de $(A ; 2)$, $(B ; 1)$, $(C ; 2)$ et $(D ; 1)$.
En utilisant la règle d'associativité, démontrer que G est sur (PS) , mais aussi sur (QR) et sur (IJ) .
- 4) Conclure.

Question subsidiaire : que pensez-vous du quadrilatère $PQRS$? Justifier votre réponse.

Exercice 8

$ABCDEFGH$ est un cube de côté égal à 1. On considère le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

I est le centre du carré $EFGH$ et J le centre du carré $BCGF$.

- 1) Faire une figure.
- 2) Préciser les coordonnées de I et J .
- 3) Calculer les distances AI , AJ et IJ .
- 4) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ et en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$.

Exercice 9

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points :

$$A(1 ; 0 ; -1) \quad B(-1 ; 0 ; 0) \quad C(1 ; -6 ; 4) \quad D(4 ; -9 ; 5) \quad E(3 ; -6 ; 3)$$

- 1) Montrer que les points A , B , C et D sont coplanaires.
- 2) Montrer que le point D appartient à la droite (AE) .
- 3) Montrer que $ABCE$ est un parallélogramme. Est-ce un rectangle? Est-ce un carré?

Exercice 10

$ABCDEFGH$ est un cube et I et J sont les milieux des segments $[HE]$ et $[FB]$.

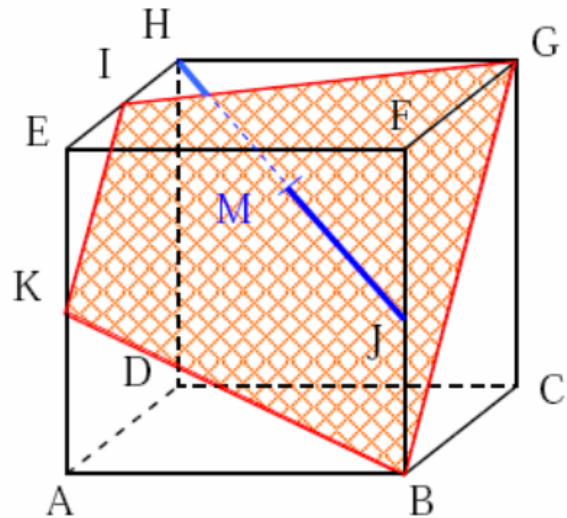
On se propose de démontrer par deux méthodes que la droite (HJ) coupe le plan (BGI) en M milieu de $[HJ]$.

Méthode analytique

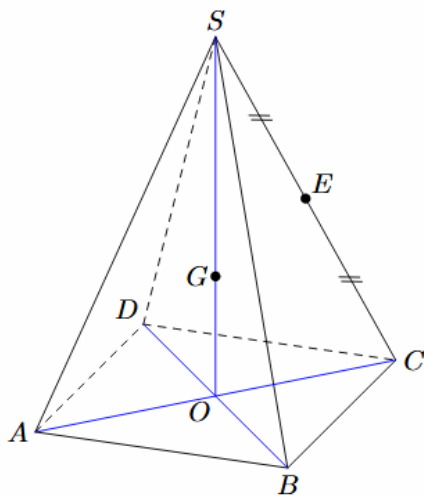
- 1) Déterminer les coordonnées des points B, G, I, H, J et M milieu de $[HJ]$ dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.
- 2) Démontrer que la droite (HJ) coupe le plan (BGI) en M .

Méthode géométrique

- 1) Démontrer que le plan (BGI) coupe le cube suivant un polygone $BGIK$ où K est le milieu de $[AE]$.
- 2) Quelle est la nature du quadrilatère $KJGH$?
- 3) Conclure.



Exercice 11

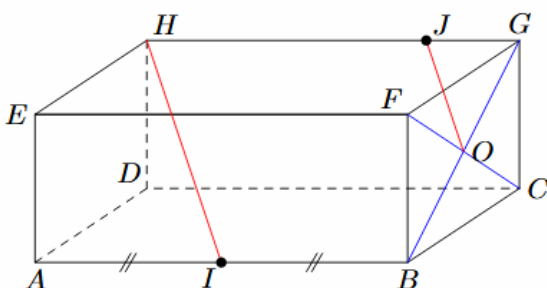


$SABCD$ est une pyramide à base carrée $ABCD$ de centre O .

G est le centre de gravité du triangle SBD et E est le milieu du segment $[SC]$.

Démontrer que les points A, G et E sont alignés.

Exercice 12



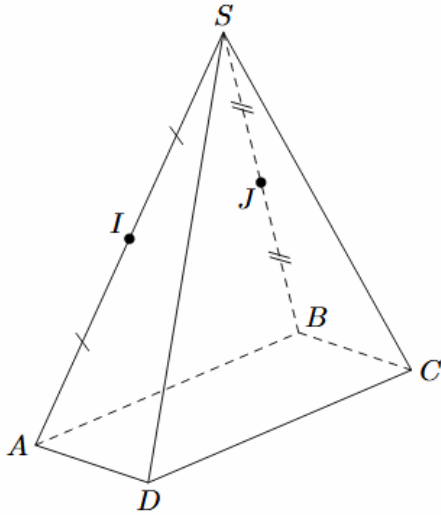
$ABCDEFGH$ est un pavé droit.

On note I le milieu de l'arête $[AB]$ et J le point tel que $\vec{HJ} = \frac{3}{4}\vec{AB}$.

O est le centre de la face $BCGF$.

Démontrer que les droites (IH) et (JO) sont parallèles.

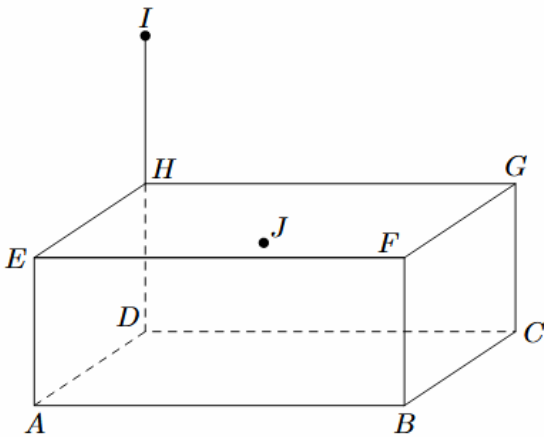
Exercice 13



La pyramide $SABCD$ est à base rectangulaire.
On appelle I le milieu de $[SA]$ et J le milieu de $[SB]$.

Déterminer l'intersection des plans (DIJ) et (SAC) .

Exercice 14

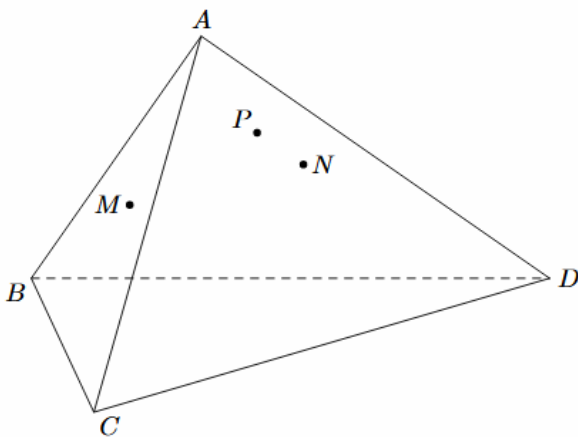


Soit un pavé $ABCDEFGH$.

On prend un point I distinct de H sur la droite (HD) et un point J sur la face $EFGH$ n'appartenant pas à $[GH]$.

Déterminer la section du pavé par le plan (IHJ) .

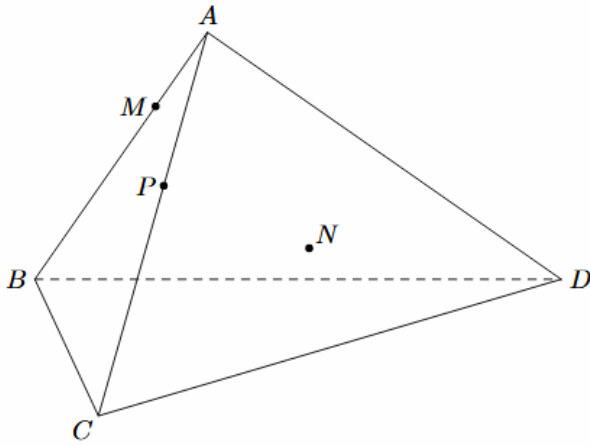
Exercice 15



Déterminer la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (MNP) , sachant que :

- M est un point du plan (ABC) ,
- N est un point du plan (ACD) ,
- P est un point du plan (ABD) .

Exercice 16

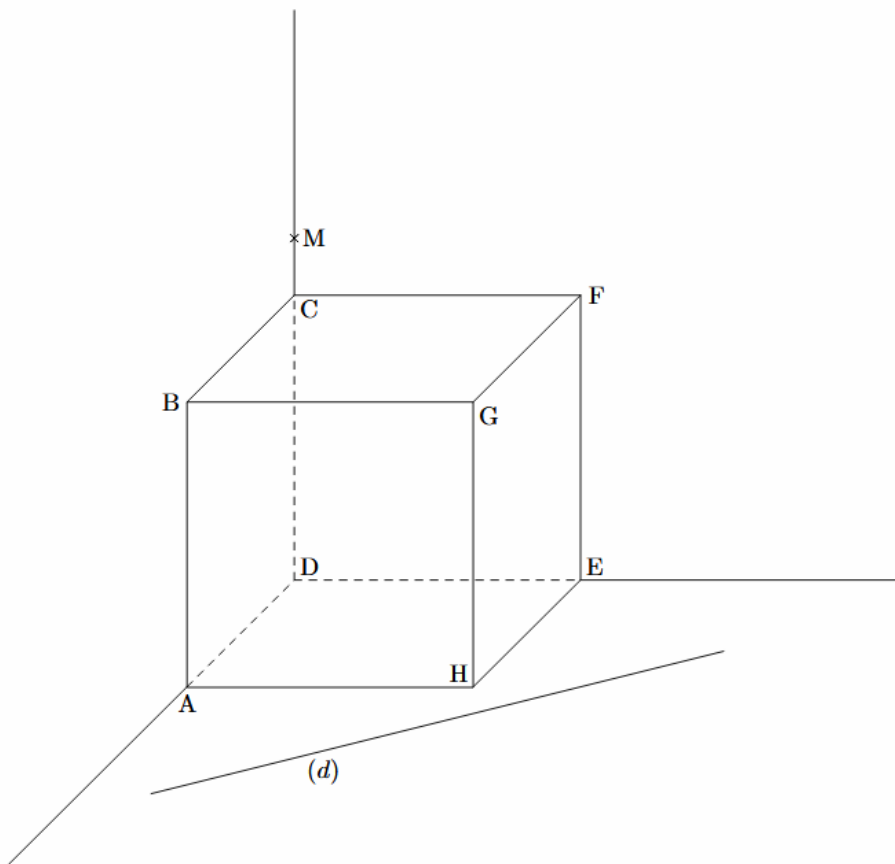


Déterminer la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (MNP) , sachant que :

- M est un point du segment $[AB]$,
- P est un point du segment $[AC]$,
- N est un point du plan (ACD) .

Exercice 17

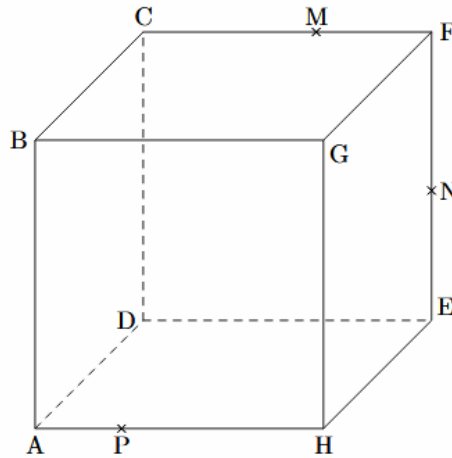
$ABCDEFGH$ est un cube. La droite (d) fait partie du plan (ADE) . M est un point de la droite (DC) . Dessiner la section du cube par le plan passant par la droite (d) et le point M .



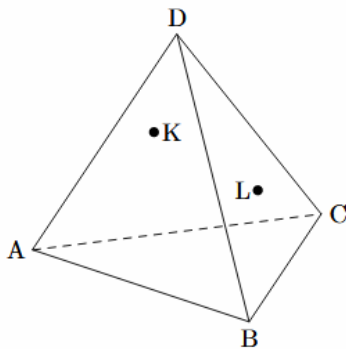
Exercice 18

$ABCDEFGH$ est un cube. M est un point du segment $[CF]$. N est un point du segment $[EF]$. P est un point du segment $[AH]$.

Dessiner la section du cube par le plan (MNP) .



Exercice 19



On considère un tétraèdre $ABCD$.

K est un point du plan (ABD) .

L est un point du plan (DBC) .

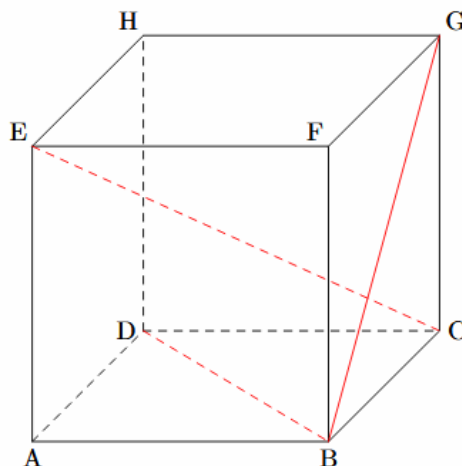
On suppose (IJ) et (KL) non parallèles.

Quel est le point d'intersection du plan (ABC) avec la droite (KL) ?

Exercice 20

$ABCDEFGH$ est un cube.

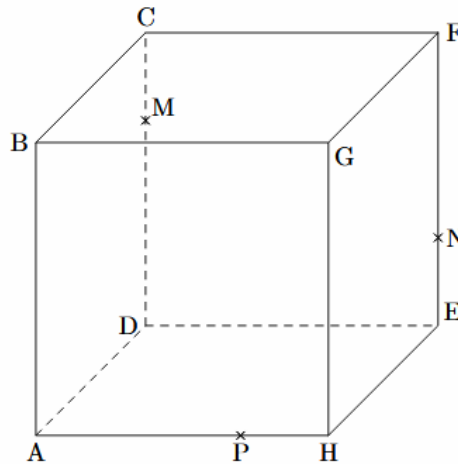
- 1) Les droites (EC) et (BD) sont-elles orthogonales ?
- 2) Les droites (EC) et (BG) sont-elles orthogonales ?



Exercice 21

$ABCDEFGH$ est un cube. M est un point du segment $[CD]$. N est un point du segment $[EF]$. P est un point du segment $[AH]$.

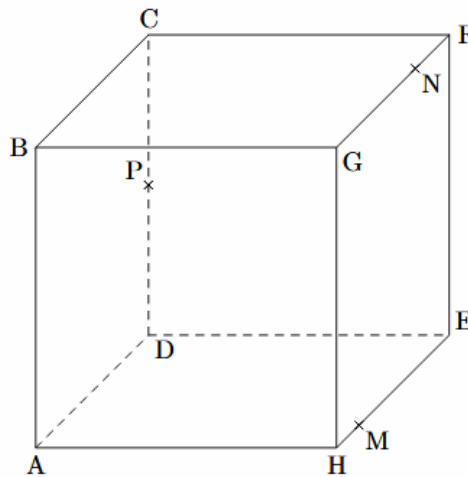
Dessiner la section du cube par le plan (MNP) .



Exercice 22

$ABCDEFGH$ est un cube. M est un point du segment $[HE]$. N est un point du segment $[GF]$. P est un point du segment $[CD]$.

Dessiner la section du cube par le plan (MNP) .



Exercice 23

Les points $A(3 ; 1 ; -2)$, $B(2 ; 3 ; 2)$, $C(4 ; -2 ; 0)$ et $D(3 ; 0 ; 4)$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 24

- 1) Démontrer que l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ est une sphère dont on donnera les éléments caractéristiques.
- 2) Le point $H(1 + \sqrt{2} ; 0 ; \sqrt{3})$ est-il sur cette sphère ?

Exercice 25

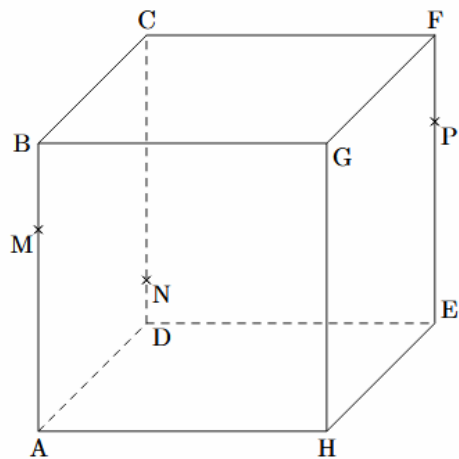
On donne $E(5 ; 2 ; 3)$ et $F(1 ; 2 ; 1)$.

Déterminer les coordonnées du point G intersection de la droite (EF) avec le plan (yOz) .

Exercice 26

$ABCDEFGH$ est un cube. M est un point du segment $[AB]$. N est un point du segment $[CD]$. P est un point du segment $[EF]$.

Dessiner la section du cube par le plan (MNP) .



Exercice 27

Les points $A(5 ; 2 ; 2)$, $B(6 ; 7 ; 4)$, $C(2 ; 5 ; 3)$ et $D(0 ; -5 ; -1)$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 28

- 1) Démontrer que l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2z = 0$ est une sphère dont on donnera les éléments caractéristiques.
- 2) Le point $H(2\sqrt{2} ; -3 ; 1 + \sqrt{2})$ est-il sur cette sphère ?

Exercice 29

On donne $E(3 ; 1 ; 4)$ et $F(5 ; 6 ; 2)$.

Déterminer les coordonnées du point G intersection de la droite (EF) avec le plan (xOz) .