SUJET G

# D.S. n°8 : Fonctions de référence — $2^{nde}$ 7

Mardi 26 mars 2013, **Calculatrices autorisées**,

Ce sujet est à rendre avec la copie.

| | | |
|---|---|---|
| Nom : . . . . . . . . . . . . . . . . . . .<br>Prénom : . . . . . . . . . . . . . . . . | Communication : $-$ $\pm$ $+$<br>Technique : $-$ $\pm$ $+$<br>Raisonnement : $-$ $\pm$ $+$ | Note : $\overline{\phantom{00}}$ **20** |

***Il faut toujours prouver vos affirmations*** *(sauf mention contraire de l'énoncé).*

/5

## Exercice 1. Le même exercice avec des nombres différents figurait dans la feuille de révision du DS

*Cet exercice est un Vrai-Faux. Dire pour chacune des propositions suivantes si elle est vraie ou si elle est fausse. Chaque réponse devra être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point par contre toute trace de recherche même non concluante sera prise en compte dans l'évaluation.*

Dans tout l'exercice $x$ désigne un nombre réel.

**1)** Si $x \geqslant 3$ alors $x^2 \geqslant 9$ **2)** Si $-7 \leqslant x \leqslant -1$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 50$

**3)** Si $-1 \leqslant x \leqslant 6$ alors $1 \leqslant x^2 \leqslant 36$ **4)** Si $x \leqslant 5$ alors $x^2 \leqslant 25$ .

/10

## Exercice 2. Le même exercice avec des nombres différents a été fait en devoir à la maison

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-5}{(x+3)^2}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

/0,5 **1)** Donner sans justification le domaine de définition de $f$ .

/0,5 **2) a)** Déterminer les coordonnés des points d'intersection éventuels de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.

/0,5 **b)** Déterminer les coordonnés des points d'intersection éventuels de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

/3 **3) a)** Déterminer le sens de variation[1] de $f$ sur $]-\infty,-3[$ .

/1 **b)** On admet que $f$ est croissante sur $]-3;+\infty[$ . Dresser le tableau de variations de $f$ .

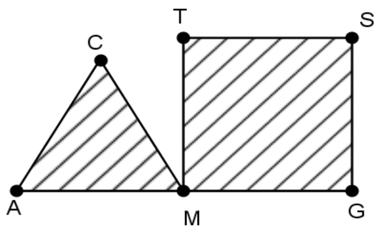
/1 **4)** Donner le meilleur encadrement possible de $f$ dans les cas suivants :

/1 **a)** $x \in [-2\ ;7]$ **b)** $x \in [-10003\ ;-4[$

/2,5 **5)** Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \leqslant -20$ .

/5

## Exercice 3.




Sur la figure ci-contre, $AG=6\,cm$ , MAC est un triangle équilatéral, STMG est un carré. La longueur AM est notée $x$ . Soit $A(x)$ l'aire hachurée. C'est donc la somme de l'aire de MAC et de celle de STMG.

/2 **1)** Montrer que $A(x) = \left(\dfrac{4+\sqrt{3}}{4}\right)x^2 - 12x + 36$. *Si vous connaissez la formule qui donne l'aire d'un triangle équilatéral (démontrée en devoir à la maison), vous pouvez l'utiliser directement. Sinon, retrouvez-la.*

/2 **2)** Déterminer le tableau de variations de la fonction $A : x \mapsto A(x)$.

/1 **3)** Prouver que l'aire $A(x)$ est minimale pour une valeur de $x$ que l'on précisera *(valeur exacte attendue).*

---

[1] *Pour montrer qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I on peut utiliser la définition : On prend deux nombres a et b dans I avec par exemple a<b et grâce à des manipulation d'inégalités (soigneusement justifiées) on établit que f(a)<f(b).*

*De même, pour montrer qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle I, on prend deux nombres a et b dans I avec a<b et grâce à des manipulation d'inégalités on établit que f(a)>f(b) .*

# CORRIGÉ

## Exercice 1. Le même exercice avec des nombres différents figurait dans la feuille de révision du DS

*Point-méthode : Pour montrer qu'une proposition est vraie on la démontre avec des propriétés du cours et pour prouver qu'une proposition est fausse on donne un contre-exemple.*

**1) <u>VRAI</u>** : Si $x \geqslant 3$, comme ces deux nombres sont positifs et que la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$, alors $x^2 \geqslant 9$.

**2) <u>VRAI</u>** : Si $-7 \leqslant x \leqslant -1$ comme ces trois nombres sont négatifs et que la fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$, alors $(-7)^2 \geqslant x^2 \geqslant (-1)^2$ càd $x^2 \in [1;49]$. Et comme l'intervalle $[1;49]$ est inclus dans l'intervalle $[0;50]$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 50$.

**3) <u>FAUX</u>** : $-1 \leqslant 0 \leqslant 6$ et pourtant $0^2 \notin [1;36]$ donc la condition $-1 \leqslant x \leqslant 6$ n'entraîne PAS $1 \leqslant x^2 \leqslant 36$.

**4) <u>FAUX</u>** : $-10 \leqslant 5$ et pourtant $(-10)^2 = 100 > 25$ donc la condition $x \leqslant 5$ n'implique PAS $x^2 \leqslant 25$.

## Exercice 2. Le même exercice avec des nombres différents a été fait en devoir à la maison

**1)** La seule valeur interdite est celle qui annule le dénominateur donc le domaine de définition de $f$ est $\boxed{D_f = ]-\infty,-3[\cup]-3,+\infty[}$

**2) a)** $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0. Comme $f(0) = -\dfrac{5}{9}$, l<u>e point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées a pour coordonnés</u> $\left(0;-\dfrac{5}{9}\right)$.

**b)** Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de $f(x)=0$. Or $f(x)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{(x+3)^2}$ ce qui est impossible. On en déduit que $\mathscr{C}$ <u>avec ne coupe pas l'axe des abscisses</u>.

**3) a)** *Sens de variation de $f$ sur $]-\infty,-3[$* :
Soient $a, b \in ]-\infty,-3[$ avec $a<b$.

$a<b<-3$

$\Rightarrow$ $a+3<b+3<-3+3=0$

$\Rightarrow$ $(a+3)^2 > (b+3)^2$ *car $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ (On applique la fonction carré aux nombre négatifs a+3 et b+3)*

$\Rightarrow$ $\dfrac{1}{(a+3)^2} < \dfrac{1}{(b+3)^2}$ *car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ (On applique la fonction inverse aux nombre <u>positifs</u> $(a+3)^2$ et $(b+3)^2$.)*

$\Rightarrow$ $\dfrac{-5}{(a+3)^2} > \dfrac{-5}{(b+3)^2}$ *car multiplier par un nombre négatif retourne les inégalités.*

$\Leftrightarrow$ $f(a) > f(b)$

Finalement, on a prouvé que pour tous réels $a$ et $b$ de $]-\infty,-3[$, $a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$ : $f$ est donc décroissante sur $]-\infty,-3[$.

**b) Tableau de variations de $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↘ | ‖ | ↗ | |

**4) a) Meilleur encadrement possible de $f$ si $x \in [-2\ ;7]$ :** $f(x) = \dfrac{-5}{(x+3)^2}$

Si $-2 \leqslant x \leqslant 7$ alors $f(-2) \leqslant f(x) \leqslant f(7)$ car $f$ est croissante sur $]-3;+\infty[$, càd $\boxed{-5 \leqslant f(x) \leqslant -\dfrac{1}{20}}$.

**b) Meilleur encadrement possible de $f$ si $x\in[-10003\ ;-4[$ :**
Si $-10003\leqslant x\leqslant -4$ alors $f(-10003)\geqslant f(x)\geqslant f(-4)$ car $f$ est décroissante sur $]-\infty,-3[$. En remplaçant les bornes par leur valeur, on obtient : $\boxed{-5\leqslant f(x)\leqslant -5\times 10^{-8}}$.

**5) Résoudre par le calcul l'inéquation** $f(x)\leqslant -20$. On suppose $x\neq -3$

$$\frac{-5}{(x+3)^2}\leqslant -20$$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{(x+3)^2}\geqslant 4$ *car diviser par le nombre négatif* $-5$ *retourne les inégalités.*

$\Leftrightarrow$ $(x+3)^2\leqslant \dfrac{1}{4}$ *car* $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ *est décroissante sur* $]0\ ;+\infty[$ *(On applique la fonction inverse à des nombre positifs.)*

$\Leftrightarrow (x+3)^2-\dfrac{1}{4}\leqslant 0 \Leftrightarrow \left(x+3+\dfrac{1}{2}\right)\left(x+3-\dfrac{1}{2}\right)\leqslant 0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{7}{2}\right)\left(x+\dfrac{5}{2}\right)\leqslant 0$ . On résout avec un tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-7/2$ | | $-3$ | | $-5/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *(x+7/2)* | | $-$ | 0 | $+$ | \|\| | $+$ | | $+$ | |
| *(x+5/2)* | | $-$ | | $-$ | \|\| | $-$ | 0 | $+$ | |
| *(x+7/2)(x+5/2)* | | $+$ | 0 | $-$ | \|\| | $-$ | 0 | $+$ | |

Finalement, $\boxed{f(x)\leqslant -20 \text{ ssi } x\in\left[-\frac{7}{2};-3\right[\cup\left]-3;-\frac{5}{2}\right]}$, ce que l'on peut vérifier graphiquement.

## Exercice 3.

Posons $\ell=AG$ ( $\ell$ exprimée en centimètres) ce qui permettra de ne faire qu'un corrigé pour les deux contrôle. Dans un des sujets $\ell=6$ et dans l'autre $\ell=8$ .

**1)** On prouve par Pythagore que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté $a$ mesure $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. L'aire d'un triangle équilatéral de côté $a$ vaut donc $A=\dfrac{\mathscr{B}\times h}{2}=a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ .

- L'aire du triangle équilatéral vaut MAC de côté $x$ vaut donc $A_{MAC}=x^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ .
- Le carré STMG a pour côté $\ell-x$ , son aire vaut donc $A_{STMG}=(\ell-x)^2$ .
- L'aire totale est $A(x)=A_{MAC}+A_{STMG}=x^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}+(\ell-x)^2=x^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\ell^2+x^2-2\ell x=x^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}+1\right)-2\ell x+\ell^2$ .

On retrouve bien la formule de l'énoncé.

**2) Déterminer le tableau de variations de la fonction A.**
A est un trinôme du second degré. Comme le coefficient de $x^2$ est positif la courbe représentative de A est une parabole tournée vers le haut. D'après le cours, son sommet a pour abscisse $x_S=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2\ell}{\frac{4+\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\ell}{4+\sqrt{3}}$ .

| $x$ | $0$ | | $\dfrac{4\ell}{\sqrt{3}+4}$ | | $\ell$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *A(x)* | $\ell^2$ | $\searrow$ | $A\left(\dfrac{4\ell}{\sqrt{3}+4}\right)$ | $\nearrow$ | $\ell^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ |

**3)** On lit sur le tableau de variations que l'aire $A(x)$ est minimale lorsque $x=\dfrac{4\ell}{\sqrt{3}+4}$ . (*La valeur minimale n'est pas demandée, on ne la calcule donc pas*).