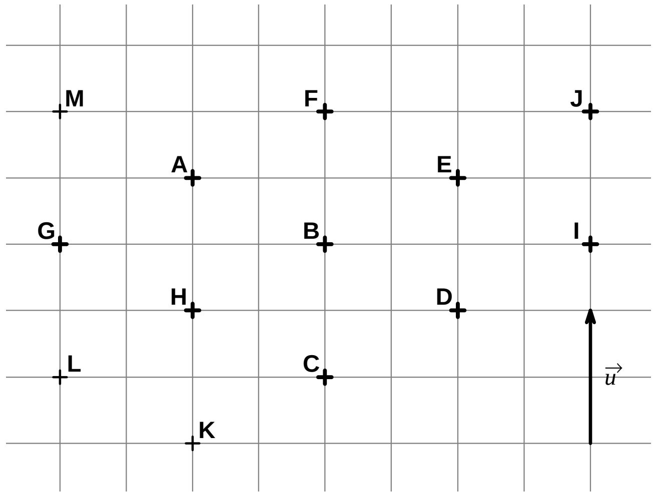
Exercices supplémentaires : Vecteurs et translations

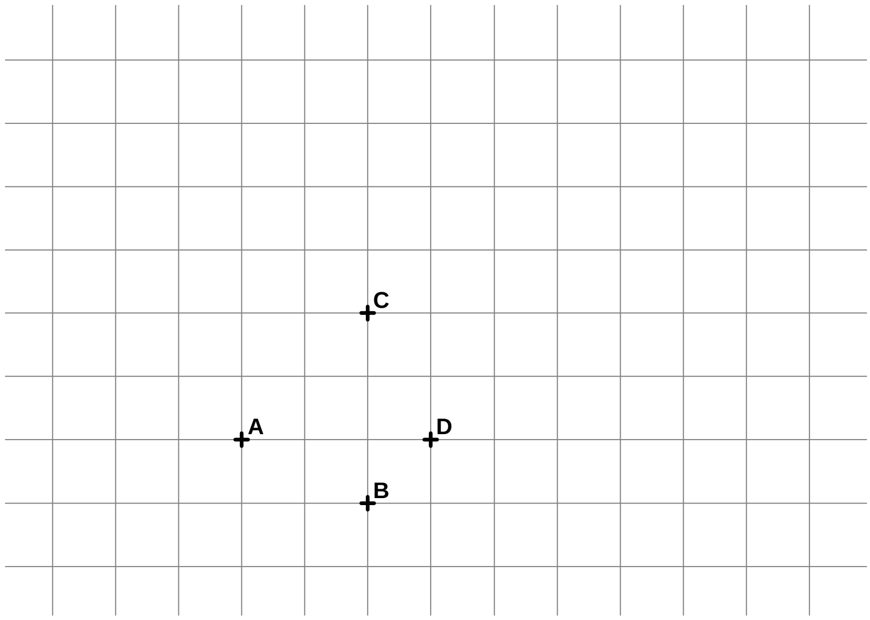
Exercice 1



1) Quelles sont les images de A ; C ; H ; D et L par la translation de vecteur $\overrightarrow{GA}$?
2) Quels sont les vecteurs égaux au vecteur $\vec{u}$?
3) Quelles sont les images de K ; D ; B ; I et G par la translation de vecteur $\overrightarrow{HA}$?
4) Quel point a pour image A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$?
5) Quel point a pour image H par la translation de vecteur $\overrightarrow{EA}$?
6) Quel point a pour image J par la translation de vecteur $\overrightarrow{LH}$?
7) Quelles sont les images de L ; H et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{KB}$?
8) Quelles sont les images de F ; I ; B et E par la translation de vecteur $\overrightarrow{JB}$?
9) Donner tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{BI}$.
10) Donner tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{CA}$.

Exercice 2

1) Construire E et F, images des points A et B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$. Ecrire les égalités de vecteurs correspondantes.



2) Construire G et H, images des points D et A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$. Ecrire les égalités de vecteurs correspondantes.
3) Construire I et J, images des points E et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Ecrire les égalités de vecteurs correspondantes.
4) Quelle est l'image du point G par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$?
5) Quelle est la nature du quadrilatère $AFBG$? Justifier.
6) Quelle est la nature du quadrilatère $CJGH$? Justifier.
7) Quelle est la nature du quadrilatère $ECGH$? Justifier.
8) Que représente A pour $[EG]$? Justifier.
9) Que représente C pour $[DI]$? Justifier.

Exercice 3

Compléter les égalités suivantes (à l'aide de la figure de l'exercice 1)

$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{B\,...}$
$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B\,...}$
$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{H\,...}$
$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{C\,...}$
$\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{K\,...}$
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{G\,...}$
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{G\,...} = \overrightarrow{L\,...}$

$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{E\,...}$
$\vec{u} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{C\,...}$
$2\vec{u} = \overrightarrow{C\,...}$
$\frac{1}{2}\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{G\,...} = \overrightarrow{F\,...}$
$-\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{C\,...}$
$-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A\,...} = \overrightarrow{H\,...}$

$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{A\,...}$
$\frac{1}{2}\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{I\,...}$
$\frac{1}{3}\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{LH}=\overrightarrow{B\,...}$
$\overrightarrow{KL}-\frac{1}{2}\overrightarrow{FC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{C\,...}$

$\vec{u}-\overrightarrow{EI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{......}$
$\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{JE}-\vec{u}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{......}$
$\frac{1}{4}\overrightarrow{JL}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IG}-\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{......}$

Exercice 4
Compléter les égalités suivantes grâce à la relation de Chasles
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{......}$
$\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{......}$
$\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{......}$
$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{......}$
$\overrightarrow{...\,E}+\overrightarrow{E\,...}=\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{A\,...}+\overrightarrow{B\,...}=\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{O\,...}+\overrightarrow{M\,...}=\overrightarrow{...\,P}$
$\overrightarrow{A\,...}+\overrightarrow{D\,...}+\overrightarrow{M\,...}=\overrightarrow{AG}$
$\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{......}+\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{FI}$
$\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{......}+\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{FL}$

Exercice 5
Grâce à la relation de Chasles, démontrer les égalités suivantes :
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

Exercice 6
On considère un parallélogramme $ABCD$. Construire les points E,F,G et H tels que
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ $\quad\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}$ $\quad\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$ $\quad\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{BD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

Exercice 7
On considère un parallélogramme $ABCD$ et les points E,F,G et H définis par
$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{CA}$ $\quad\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FD}=\vec{0}$ $\quad\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{DA}$ $\quad\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{DB}$
Montrer les égalités suivantes puis construire les points E,F,G et H.
$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})$ $\quad\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ $\quad\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ $\quad\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}$

Exercice 8
On considère un triangle ABC et les points D et E tels que $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
Justifier que $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{AB}$ et en déduire que C est le milieu de $[DE]$.

Exercice 9
On considère un parallélogramme $MNPQ$ de centre O. Construire les points A,B et C tels que $\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{MO}$; $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MO}$ et $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OP}$.
1) Démontrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MP}$.
2) Démontrer que $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{MP}$
3) En déduire la nature du quadrilatère $OABC$.
4) Démontrer que les droites (PB) et (CA) sont les médianes du triangle OBC.
5) Ces deux droites se coupent en G. Démontrer que (OG) coupe $[BC]$ en son milieu.

Exercice 10
On considère un triangle ABC et les points M et N tels que $\overrightarrow{AM}=5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BC}$.
Démontrer que $\overrightarrow{MN}=\vec{0}$.

Correction

Exercice 1

1) L'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{GA}$ est F.

L'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{GA}$ est D.

L'image de H par la translation de vecteur $\overrightarrow{GA}$ est B.

L'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{GA}$ est I.

L'image de L par la translation de vecteur $\overrightarrow{GA}$ est H.

2) $\vec{u} = \overrightarrow{LG} = \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{KH} = \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{IJ}$

3) L'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{HA}$ est H.

L'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{HA}$ est E.

L'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{HA}$ est F.

L'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{HA}$ est J.

L'image de G par la translation de vecteur $\overrightarrow{HA}$ est M.

4) C'est le point G qui a pour image A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

5) C'est le point D qui a pour image H par la translation de vecteur $\overrightarrow{EA}$.

6) C'est le point E qui a pour image J par la translation de vecteur $\overrightarrow{LH}$.

7) L'image de L par la translation de vecteur $\overrightarrow{KB}$ est A.

L'image de H par la translation de vecteur $\overrightarrow{KB}$ est F.

L'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{KB}$ est J.

8) L'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{JB}$ est G.

L'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{JB}$ est C.

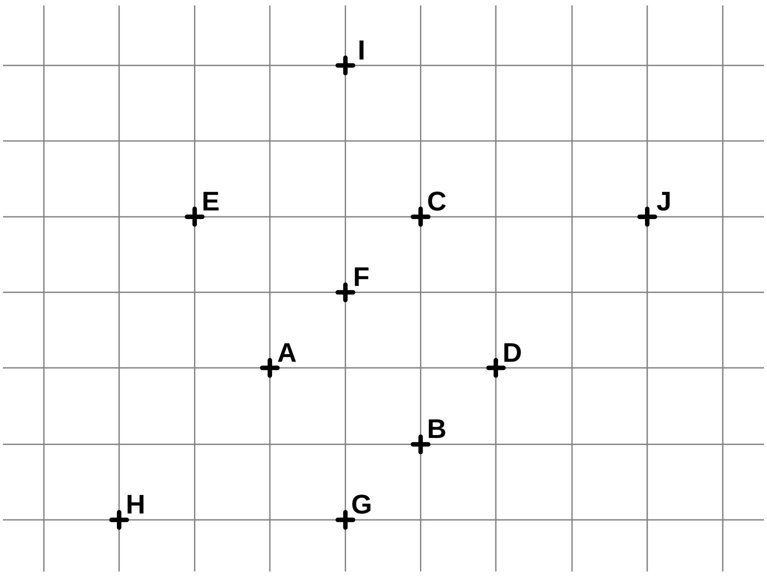
L'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{JB}$ est L.

L'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{JB}$ est H.

9) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{LC}$

10) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{DF}$

Exercice 2



1) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$
2) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AH}$
3) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{DJ}$
4) L'image du point G par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$ est C.

5) Comme $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DG}$, alors $ACDG$ est un parallélogramme et on a donc aussi $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{DC}$. Or $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BF}$ donc $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BF}$ ce qui signifie que $AFBG$ est un parallélogramme.

6) Comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DJ}$, on peut dire que $ACJD$ est un parallélogramme et on a aussi $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AD}$.
Par ailleurs, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DG}$ donc $AHGD$ est un parallélogramme et on a aussi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HG}$.
On en déduit que $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{HG}$ et donc $CJGH$ est un parallélogramme.

7) On sait que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AE}$ donc $AECD$ est un parallélogramme et on a aussi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EC}$. Par ailleurs, dans la question précédente, nous avons montré que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HG}$ donc $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EC}$ ce qui montre que $ECGH$ est un parallélogramme.

8) A la question 5, nous avons montré que $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{DC}$ or $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AE}$ ce qui montre que A es le milieu de $[GE]$.

9) On sait que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EI}$ donc $ACIE$ est un parallélogramme et donc on a aussi $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CI}$. De plus, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CI}$ ce qui montre que C est le milieu de $[DI]$.

Exercice 3

Compléter les égalités suivantes :

$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$

$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{KD}$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{GD}$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{LC}$

$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{EE} = \vec{0}$

$\vec{u} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CB}$

$2\vec{u} = \overrightarrow{CF}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{FJ}$

$-\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CD}$

$-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HC}$

$\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{IH}$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{LH} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{KL} - \frac{1}{2}\overrightarrow{FC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{CE}$

$\vec{u} - \overrightarrow{EI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CH}$

$\overrightarrow{CH} - \overrightarrow{JE} - \vec{u} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CA}$

$\frac{1}{4}\overrightarrow{JL} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IG} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{EK}$

Exercice 4

Compléter les égalités suivantes grâce à la relation de Chasles

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO}$

$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EE} = \vec{0}$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AG}$

$\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{FI}$

$\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{EL} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{FL}$

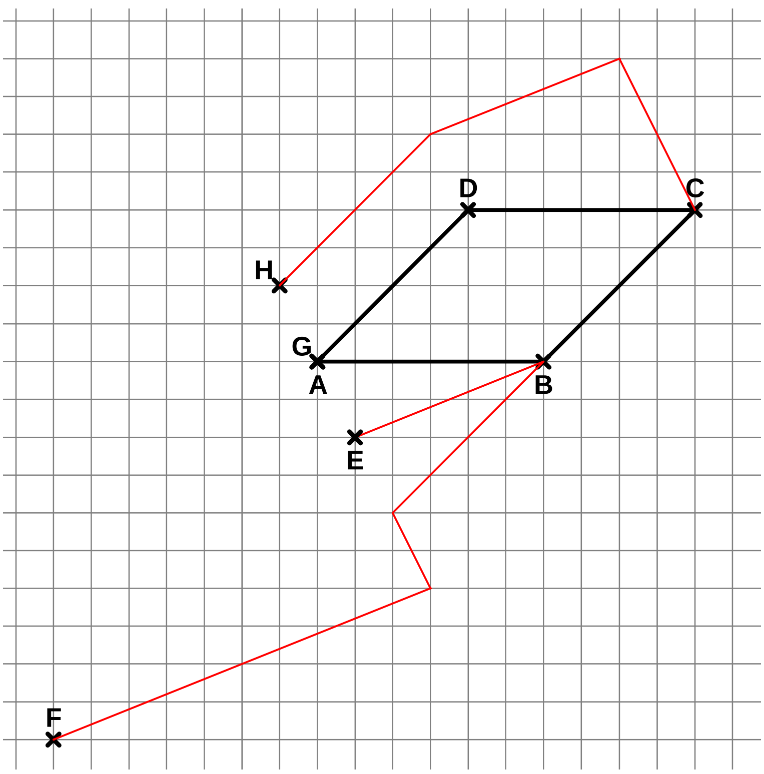
Exercice 5

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

Exercice 6



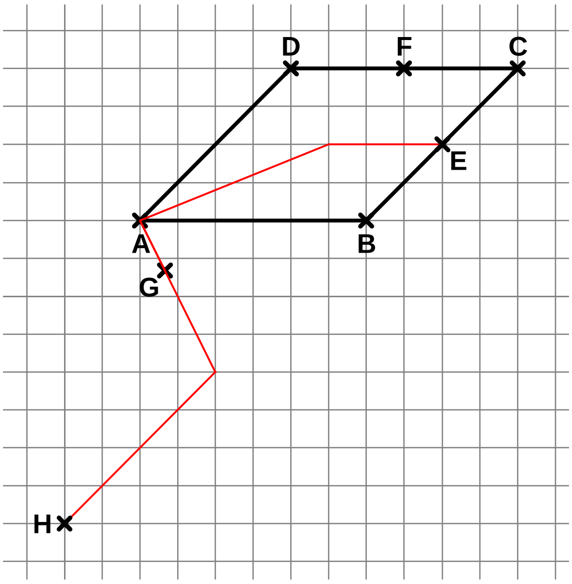
Exercice 7

$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{FC}=-\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}-2\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$



Exercice 8

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$
Or $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CE}$ ce qui signifie que C est le milieu de $[DE]$.

Exercice 9

1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MP}$
2) $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{MP}$ car O est le milieu de $[MP]$
3) On a donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ donc $ABCO$ est un parallélogramme.
4) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{PC}$ donc P est le milieu de $[OC]$ et donc (PB) est une médiane de OBC.

Comme $OABC$ est un parallélogramme, ses diagonales se coupent en leur milieu donc (AC) coupe $[OB]$ en son milieu et est donc une médiane de OBC.

5) G est le point d'intersection de deux médianes donc est le centre de gravité de OBC. Il appartient donc à la troisième médiane qui est alors (OG) et qui coupe le troisième côté $[BC]$ en son milieu.

Exercice 10

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=5\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CB}$
$=3\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CB}=3(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=3\overrightarrow{BB}=\vec{0}$