Continuité d'une fonction et équation

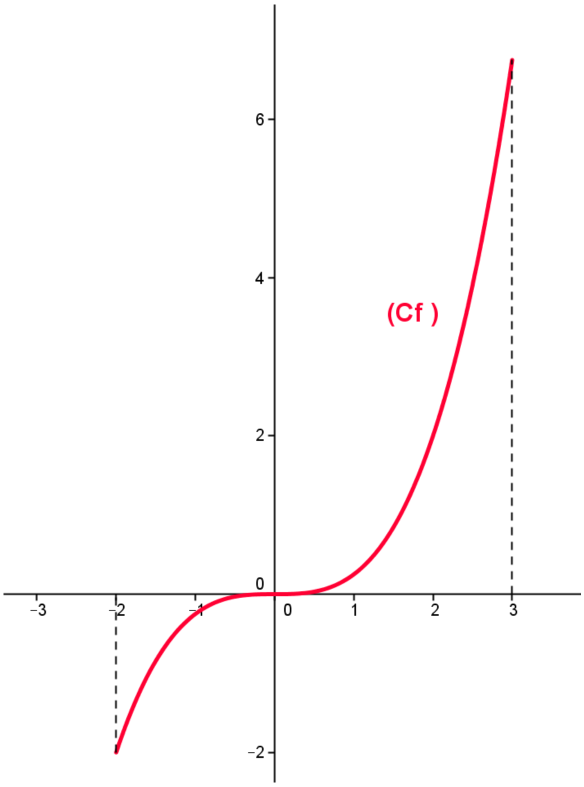
I) Notion de continuité

1) Définition

On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I lorsque le tracé de sa courbe représentative sur l'intervalle I se fait sans lever le crayon.

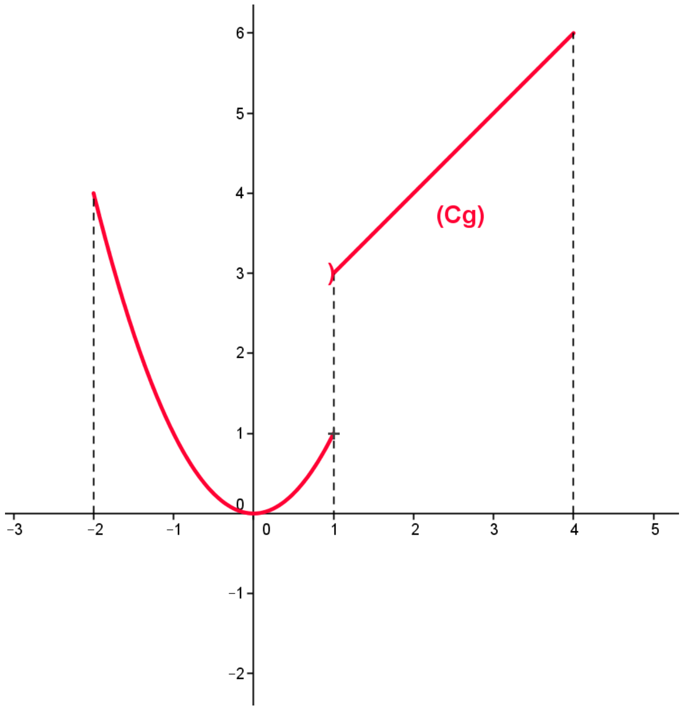
Exemples :

f est une fonction définie sur l'intervalle I = [– 2 ; 3] dont la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est représentée ci-dessous :



Cette courbe se trace sans lever le crayon sur I donc la fonction f est continue sur I.

g est une fonction définie sur l'intervalle I = [− 2 ; 4] dont la courbe ($\mathcal{C}_g$) est représentée ci-dessous :

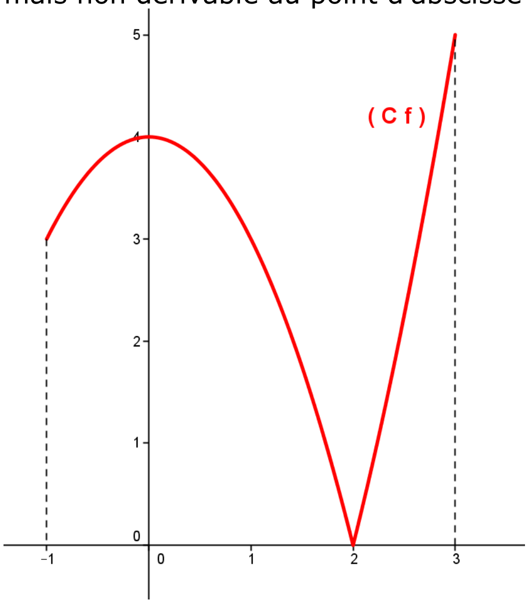


Cette courbe ne peut pas être tracée sans lever le crayon au point d'abscisse 1 donc la fonction g n' est pas continue sur I. (par contre elle est continue sur les intervalles
[− 2 ;1] et]1 ; 4])

2) Lien entre dérivabilité et continuité

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur cet intervalle.

Attention la réciproque est fausse comme l'illustre l'exemple ci-dessous où la fonction f est continue sur l'intervalle [− 1 ; 3] (en effet on peut tracer sa courbe sans lever le crayon) mais non dérivable au point d'abscisse 2 (la courbe n'admet pas de tangente en ce point).



II) Continuité des fonctions usuelles

Propriété (admise)

• Les fonctions polynômes, rationnelles et racine carrée sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

• La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont continues.

Exemples :

1.La fonction f définie pour tout x réel ($x \neq \frac{5}{3}$) par $f(x) = \frac{x^2+2x+5}{3x-5}$ est continue sur les intervalles $]-\infty\ ;\ \frac{5}{3}[$ et $]\frac{5}{3}\ ;\ +\infty[$ où elle est définie.
(En effet c'est le quotient de deux polynômes continus sur $\mathbb{R}$ et $3x - 5$ est non nul sur ces intervalles).

2. La fonction g définie sur $\mathrm{I} =]-\infty\ ;\ 6[$ par $g(x) = \sqrt{6-x}$ est continue sur I comme racine carrée d'une fonction continue et positive sur I.

Remarque :

Par convention, **une flèche inclinée** dans un tableau de variations d'une fonction indique que celle-ci est continue et strictement croissante (ou décroissante) sur l'intervalle considéré.

Exemple :

Dans le tableau de variation ci-dessous la fonction *f* est continue et strictement décroissante sur l'intervalle] – ∞ ; 3] et continue et strictement croissante sur l'intervalle [3 ; 7]

x	- ∞		3		7
$f(x)$	2	↘	– 5	↗	4

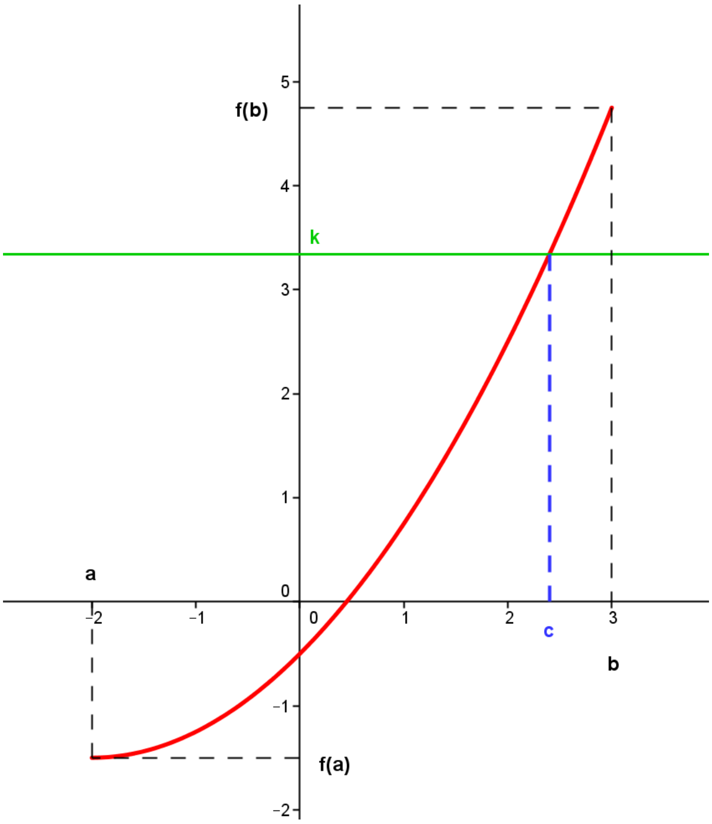
III) Propriété des valeurs intermédiaires

1) Propriété (admise) :

Soit f une fonction continue et strictement monotone (croissante ou décroissante) sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique réel c tel que $f(c) = k$.

Autrement dit l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution appartenant à l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Illustration :



2) Application à la résolution d'équation

a) Exemple1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x+1}$$

1) Etudiez les variations de f sur [-1,5 ; −1,1] .

2) Déduisez en que l'équation $f(x) = 10$ a une unique solution α dans l'intervalle [-1,5 ; −1,1]

Réponse:

1) Tout d'abord calculons la fonction dérivée f' de f sur $\mathbb{R} - \{-1\}$

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^3$ donc $u'(x) = 3x^2$ et $v(x) = x + 1$ donc $v'(x) = 1$

Donc sur $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+1)-x^3}{(x+1)^2} = \frac{3x^3+3x^2-x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2\,(2x+3)}{(x+1)^2}$$

Or, $x^2 \geq 0$ et $(x+1)^2 > 0$ car se sont des carrés, le signe de f' dépend de celui de $2x + 3$

et $2x + 3 = 0$ pour $x = -\frac{3}{2}$

On obtient donc le tableau de variation suivant:

x	$-1{,}5$		-1,1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	13,31

2) La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle [-1,5 ; -1,1]
De plus 10 ∈ [$\frac{27}{4}$; 13,31] donc il existe un unique réel α dans l'intervalle [-1,5 ; -1,1]
tel que $f(\alpha) = 10$

b) Exemple 2 :

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f définie et continue sur $[-8\,;\,8]$

x	-8		-1		4		8
$f(x)$	-10	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	4

Expliquer pourquoi l'équation $f(x) + 3 = 0$ admet exactement trois solutions distinctes sur $\mathbb{R}$.

Réponse:

$f(x) + 3 = 0$ équivaut à résoudre $f(x) = -3$

Pour appliquer la propriété nous devons travailler dans des intervalles où la fonction est strictement monotone.

Nous allons donc appliquer la propriété sur l'intervalle [-8 ; -1] puis sur l'intervalle [-1 ; 4] et enfin sur l'intervalle [4 ; 8]

• Sur l'intervalle [-8; -1]:

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle [-8 ; -1].

De plus -3 ∈ [-10 ; 2] donc il existe un unique réel x_1 dans l'intervalle [-8 ; -1].tel que $f(x_1) = -3$

• Sur l'intervalle [-1 ; 4]:

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [-1 ; 4].

De plus -3 ∈ [-5 ; 2] donc il existe un unique réel x_2 dans l'intervalle [-5 ; 2] tel que $f(x_2) = -3$

• Sur l'intervalle [4 ; 8]

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle [4 ; 8]

De plus -3 ∈ [-5 ; 4] donc il existe un unique réel x_3 dans l'intervalle [-5 ; 4] tel que $f(x_3) = -3$

• Conclusion : L'équation $f(x) + 3 = 0$ admet exactement trois solutions distinctes sur $\mathbb{R}$.

2) Cas particulier

Soit f une fonction continue et strictement monotone (croissante ou décroissante) sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. Si de plus, $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, il existe un unique réel c tel que $f(c)\ = 0$.

Autrement dit l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution appartenant à l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Exemples :

Exemple 1 :

La fonction f est continue et strictement croissante sur I = [-4 ; 5] et vérifie $f(-4) = -3$ et $f(5)\ =\ 2$. L'équation $f(x)\ =\ 0$ admet-elle une solution dans I ?

Réponse:

La fonction f est continue et strictement croissante sur I = [-4 ; 5].
De plus $f(-4) < 0$ et $f(5) > 0$ donc l'équation $f(x)\ =\ 0$ admet une unique solution dans I.

Exemple 2 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) =\ x^3 + x - 3$.
a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle [0 ; 2].
b. Donner un encadrement de cette solution à 10^{-2} près.

Réponse:

a. f est une fonction continue sur [0 ; 2]. (Fonction polynôme). $f'(x)\ =\ 3x^2 + 1$

$f'(x)$ est strictement positive sur [0 ; 2] donc f est strictement croissante sur [0 ; 2].

De plus $f(0)\ =\ -3$ < 0 et $f(2)\ =\ 7$ > 0. D'après la propriété des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet donc **une unique solution sur l'intervalle [0 ; 2].**

b. $f(1) =\ -1 < 0$ et $f(2)\ =\ 7 > 0$ cette solution est comprise entre 1 et 2

$f(1{,}2)\ =\ -0{,}075\ < 0$ et $f(1{,}3)\ =\ 0{,}497\ >\ 0$ cette solution est comprise entre 1,2 et 1,3

$f(1{,}21) =\ -0{,}018.. < 0$ et $f(1{,}22)\ =\ 0{,}0358.. >\ 0$ cette solution est comprise entre 1,21 et 1,22

1,21 < x < 1,22

Exemple 3 : Voici le tableau de variation d'une fonction f

x	**-1**	**3**	**7**
$f(x)$	**2**		**1**
		-4	

1. Expliquer pour l'équation $f(x)\ = 0$ admet deux solutions a et b avec $a < b$ sur l'intervalle [-1 ; 7]

2. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle [-1 ; 7]

Réponse :

1. Nous allons donc appliquer la propriété sur l'intervalle $]-1\ ;\ 3]$ puis sur l'intervalle $[3\ ;\ 7]$

• **Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$**

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [-1 ; 3]

De plus $f(-1)$ et $f(3)$ sont de signes contraires donc il existe un unique réel a dans l'intervalle $[-1\,;3]$ tel que $f(a\,) = 0$

• **Sur l'intervalle $[3\ ;\ 7]$:**

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle [3 ; 7].

De plus f(3) et $f(7)$ sont de signes contraires donc il existe un unique réel b dans l'intervalle [3 ;7] tel que $f(\mathrm{b}) = 0$

• **Conclusion :** L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[-1\,;7]$

2. Le tableau de signe de la fonction f est donc :

x	-1		a		b		7
$f(x)$		+	0	$-$	0	+	