Etude d'une fonction de la forme:
$x \longmapsto ln(u(x))$

I) Généralités

• **Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction f définie sur l'intervalle I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et on a :**

$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

• **Comme la fonction u est strictement positive alors le signe de la dérivée dépend du signe de la fonction u'**

• **Comme la fonction ln est strictement croissante alors d'après le théorème des fonctions composées le sens de variations de f est le même que celui de u.**

II)Exemple:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 - 3x - 10)$

Soit u la fonction définie sur [par $u(x) = x^2 - 3x + 10$

Dans notre exemple $f(x) = \ln(u(x))$

• **Déterminons , tout d'abord, son domaine de définition :**

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$\Delta = 9 + 4 \times 1 \times 10 = 49$ on a donc $x_1 = 5$ et $x_2 = -2$

$x^2 - 3x + 10 > 0$ pour $x < -2$ et $x > 5$

Donc la fonction f est définie sur $]-\infty\,;\, -2[\cup]5\,;\, +\infty[$

• Etudions les variations de f :

$u(x) = x^2 - 3x - 10$ donc $u'(x) = 2x - 3$

Sa dérivée est donc :

$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+10}$

$f'(x) = 0$ pour $x = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $u'(x) \geq 0$ pour $x \geq \frac{3}{2}$ et $u'(x) \leq 0$ pour $x \leq \frac{3}{2}$

En tenant compte du domaine de définition :
f est donc décroissante sur$]-\infty\,;\, -2[$ et croissante sur $]5\,;\, +\infty[$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	$\|\|$		0		$\|\|$	$+$	
$ln(u(x))$		↘	$\|\|$				$\|\|$	↗	

Les courbes représentatives des fonctions u et f sont :