Fonction logarithme népérien

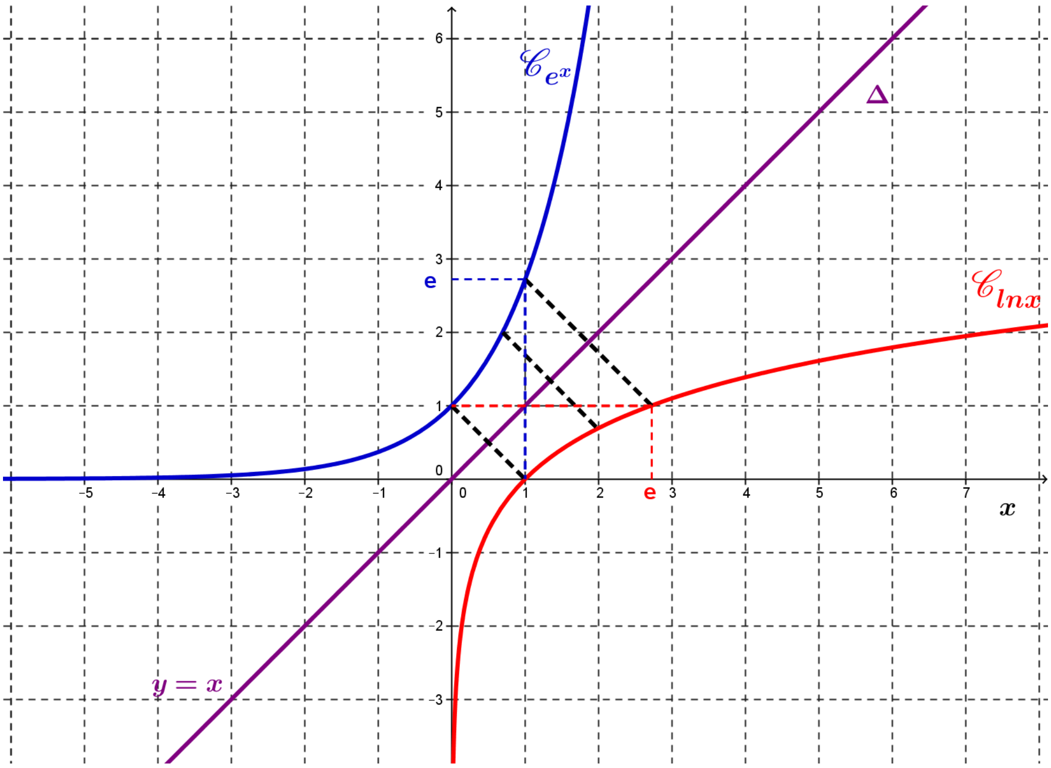
I) La fonction logarithme népérien d'un réel strictement positif

1) Définition

Pour tout réel x strictement positif le réel $ln(x)$ est l'unique nombre solution de l'équation : $e^y = x$ d'inconnue y c'est-à-dire :
que pour tout réel $x > 0$, $lnx = y$ équivaut à : $x = e^y$
Ainsi la fonction logarithme népérien notée $x \mapsto lnx$ est définie sur]0 ;+∞[

Remarque :

Les fonctions exponentielles et logarithme népérien sont des fonctions réciproques. Dans un repère orthonormé, leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$



2) Conséquences

- $e^0 = 1$ alors $0 = ln1$
- Comme $e^1 = e$ alors $1 = lne$
- Pour tout $x > 0$, $e^{lnx} = x$
- $e^x = k$ avec $k > 0$ a pour unique solution : $x = \ln(k)$

Exemples :

- $e^{\ln(3)} = 3$
- $e^{\ln(5)} = 5$
- $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$

• Résoudre $e^x = 5$

$x = \ln(5)$ donc $S = \{\ln(5)\}$

II) Propriétés de la fonction logarithme népérien

1) Propriétés de la fonction logarithme népérien

Pour tout nombre réel a et b strictement positifs :

• $\boldsymbol{ln(a \times b) = \ln(a) + ln(b)}$

• $\boldsymbol{ln(\frac{1}{a}) = -ln(a)}$

• $\boldsymbol{ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - ln(b)}$

• $\boldsymbol{ln(a^n) = n\, ln(a)}$

• $\boldsymbol{ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\, ln(a)}$

Pour tous nombres a_1, a_2, ...a_n :

$\boldsymbol{ln(a_1 \times a_2 \times \ldots\ldots . . \times a_n) = ln(a_1) + ln(a_2) + \cdots . + ln(a_n)}$

Démonstration:

Nous allons prouver les deux premières formules :

• Montrons que pour tout nombre a et b positifs : $ln(a \times b) = \ln(a) + ln(b)$

Soit x et y deux nombres réels strictement positifs.

Il existe deux nombres réels a et b tels que : $x = e^a$ et $y = e^b$

$\ln(x \times y) = \ln(e^a \times e^b) = \ln(e^{a+b})$ car $(e^a \times e^b = e^{a+b})$

Donc $\ln(x \times y) = \ln(e^{a+b}) = a + b$

$x = e^a$ donc $a = \ln(x)$ de même, $y = e^b$donc $b = \ln(y)$ par conséquent :

$\boldsymbol{\ln(x \times y) = ln(x) + ln(y)}$

• Montrons que pour tout nombre a et b positifs : $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

Soit x un nombre réel strictement positif.

Il existe un nombre réel a tel que : $x = e^a$

$ln\left(\frac{1}{x}\right) = ln\left(\frac{1}{e^a}\right) = \ln(e^{-a})$ car ($\frac{1}{e^a} = e^{-a}$) de plus $x = e^a$ donc $a = \ln(x)$

Par conséquent : $ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(e^{-a}) = -a = -ln(x)$

Exemples :

Exemple 1 : $ln3 + ln2 + \ln 5 = \ln(3 \times 2 \times 5) = \ln(30)$

Exemple 2 : $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

Exemple 3 : Ecrire $ln(24)$ puis $ln(\frac{16}{9})$ en fonction de $ln(2)$ et de $ln(3)$:

$ln(24) = ln(3 \times 8) = ln(3) + ln(8) = ln(3) + ln(2 \times 2 \times 2) = ln(3) + ln(2) + ln(2) + \ln(2)$
$= ln(3) + 3\,ln(2)$ Donc $\boldsymbol{ln(24) = ln(3) + 3\,ln(2)}$

Exemple 4 :
$ln(\frac{16}{9}) = ln(\frac{2^4}{3^2}) = ln(2^4) - ln(3^2) = 4\,ln(2) - 2ln(3)$ Donc : $\boldsymbol{ln(\frac{16}{9}) = 4\,ln(2) - 2ln(3)}$

2) Résolution d'équation

a) Théorème:

Soit A et B deux réels strictement positifs, l'équation $\ln(A) = \ln(B)$ équivaut à $A = B$.

b) Exemples:

Exemple 1 Résoudre l'équation : $ln(x) - 2 = 0$
Cette équation n'est possible que pour $x > 0$

$\ln(x) = 2$ donc $\ln(x) = \ln(e^2)$

donc $x = e^2$.($e^2 > 0$) Donc $S = \{e^2\}$

Exemple 2 Résoudre l'équation :$e^x - 5 = 0$
$e^x = 5$ donc $\ln(e^x) = \ln(5)$ Donc $x = \ln(5)$ $\boldsymbol{S = \{\ln(5)\}}$

Exemple 3 Résoudre l'équation : $ln(x) = -3$
Cette équation n'est possible que pour $x > 0$

on a donc $x = e^{-3}$.($e^{-3} > 0$) . La solution est: S = $\{e^{-3}\}$

Exemple 4 Résoudre l'équation :$4\,ln(x) = 3$
Cette équation n'est possible que pour $x > 0$

elle est équivalente à: $ln(x) = \frac{4}{3}$ d'où $x = e^{\frac{4}{3}}$ ($e^{\frac{4}{3}} > 0$) La solution est : S = $\{e^{\frac{4}{3}}\}$

Exemple 5 Résoudre l'équation :$\ln\left(\frac{1}{x}\right) + 2\ln(x) = 5$
Cette équation n'est possible que pour $x > 0$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + 2\ln(x) = 5$ équivaut à :
$-\ln(x) + 2\ln(x) = 5$
$\ln(x) = 5$ donc $x = e^5$ ($e^5 > 0$) La solution est: S = $\{e^5\}$

Exemple 6 Résoudre l'équation suivante: $\ln(x) = 2\ln(3)$
Cette équation n'est possible que pour $x > 0$: $\ln(x) = 2\ln(3)$ équivaut à : $\ln(x) = \ln(3^2)$

Donc $x = 9$ $(9 > 0)$ Donc la solution est $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{9}\}$

Exemple 7 Résoudre l'équation suivante: $ln(x) + ln(5) - 4 = 0$
Cette équation n'est possible que pour $x > 0$

elle est équivalente à: $ln(5x) = 4$ d'où $5x = e^4$ On obtient donc : $x = \frac{e^4}{5}$

$(\frac{e^4}{5} > 0)$ donc La solution est: S = $\{\frac{e^4}{5}\}$

Exemple 8 Résoudre l'équation suivante $ln(3x-4) = 2$

Il faut que $3x-4>0$ soit $x > \frac{4}{3}$ Cette équation n'est possible que pour $x > \frac{4}{3}$

$ln(3x-4) = 2$ alors $3x-4=e^2$ donc $x = \frac{4+e^2}{3}$ comme $\frac{4+e^2}{3} > \frac{4}{3}$ alors

La solution est: S = $\{\frac{4+e^2}{3}\}$

Exemple 9: Résoudre l'équation suivante $ln(x+2) = ln(x) + 1$

$x+2>0$ soit $x > -2$ de plus il faut aussi que $x>0$ il faut donc que $x>0$

Cette équation n'est possible que pour $x>0$

$ln(x+2) = ln(x) + 1$ donc $ln(x+2) - ln(x) = 1$ ce qui implique que :

$\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 1$ ce qui donne : $\frac{x+2}{x} = e^1$

$x+2 = e\,x$

$x(1-e) = -2$

$x = \frac{-2}{1-e} = \frac{2}{e-1} > 0$

La solution est: S = $\{\frac{2}{e-1}\}$

Exemple 10: Résoudre l'équation suivante**:** $2e^{2x-1} = e^x$

$2e^{2x-1} = e^x$ on obtient donc:

$ln(2e^{2x-1}) = ln(e^x)$ on en déduit :

$ln(2) + \ln(e^{2x-1}) = ln(e^x)$

$ln(2) + 2x - 1 = x$

$2x - x = 1 - ln(2)$

$x = 1 - ln(2)$

La solution est: S = $\{1 - ln(2)\}$

Exemple 11: Résoudre l'équation suivante: $e^{2x} + 3\,e^x = 10$

Ce qui équivaut à : $(e^x)^2 + 3\,e^x = 10$

Posons $X = e^x$

Or pour tout x de $\mathbb{R}$, e^x >0 donc $X > 0$ on obtient alors :

$X^2 + 3X = 10$

$X^2 + 3X - 10 = 0$ Cette équation a pour solutions $X_1 = 2$ et $X_2 = -5$

Comme $X > 0$ alors l'unique solution est $X_1 = 2$ ($X_2 < 0$) ne peut être solution)

Donc $e^x = 2$

On obtient donc : $x = ln(2)$

La solution est: S = $\{ln(2)\}$

c) Equation du type $x^n = k$

Propriété :

Soit $k \in]0;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, Dans]0 ;+∞[l'équation $x^n = k$ possède une unique solution : $x = k^{\frac{1}{n}}$
Le nombre $k^{\frac{1}{n}}$ est la racine nième du nombre k

Exemples:

Exemple 1 : Résoudre l'équation dans]0 ;+∞[: $x^5 = 7$

Cette équation a pour unique solution $x = 7^{\frac{1}{5}}$

$S = \left\{7^{\frac{1}{5}}\right\}$

Application au coefficient multiplicateur :

Si C_M est le coefficient multiplicateur global sur n années, le taux moyen d'évolution annuel t est : $(1+t)^n = C_M$ soit $t = C_M^{\frac{1}{n}} - 1$

Exemple: La consommation d'eau minérale en bouteille est passée de 133,8 L par personne en 1999 à 153,7 par personne en 2009**.**

a) Calculer le coefficient multiplicateur global sur ces 10 années, avec 3 chiffres après la virgule.

b) Montrer que le taux d'évolution annuel moyen t vérifie $(1+t)^{10} = \frac{153,7}{133,8}$

c) déterminer t en pourcentage à 0,1 près.

Réponse :

a) Le coefficient multiplicateur est $\boldsymbol{C_M} = \frac{153,7}{133,8} \approx 1,148$

b) $\boldsymbol{C_M} = \frac{153,7}{133,8}$ et $= 10$, comme $(1+t)^n = C_M$ alors $(1+t)^{10} = \frac{153,7}{133,8}$

c) $(1+t)^{10} = \frac{153,7}{133,8}$

$1 + t = (\frac{153,7}{133,8})^{\frac{1}{10}}$

$t = (\frac{153,7}{133,8})^{\frac{1}{10}} - 1$

$t \approx 0,014$

$t \approx 1,4\ \%$

d) Recherche de l'exposant

Soit $k \in]0;+\infty[$ l'équation $q^x = k$ ($q > 0$ et $q \neq 1$) possède une unique solution : $x = \frac{\ln(k)}{\ln(q)}$.

Remarque : q^x peut s'écrire $e^{x\ln q}$ avec $q > 0$ et $q \neq 1$

Ainsi dans $\mathbb{R}$, l'équation $\boldsymbol{q^x} = k$ peut s'écrire $\boldsymbol{e^{x\ln q}} = k$ et donc $\ln(\boldsymbol{e^{x\ln q}}) = \ln(k)$

$\boldsymbol{x\ln(q)} = ln(k)$ d'où $= \frac{\ln(k)}{\ln(q)}$.

Exemples:

Exemple 1 :

Résoudre l'équation $7^x = 2$

$x = \frac{\ln(2)}{\ln(7)}$ donc S = $\{\frac{\ln(2)}{\ln(7)}\}$

III) Etude de la fonction logarithme népérien

1) Dérivée de la fonction $x \mapsto ln(x)$

Théorème:

> **La fonction ln est définie et continue sur]0 ;+∞[**
>
> **La fonction ln est dérivable sur]0 ;+∞[et $ln'(x) = \frac{1}{x}$**

Démonstration:

On sait que pour tout $x > 0$ $e^{\ln(x)} = x$

Or, $(e^u)' = u'e^u$ et la fonction dérivée de x est 1

Si $f(x) = x$ alors $f'(x) = 1$ donc $\left(e^{ln(x)}\right)' = 1$

On obtient donc : pour tout $x > 0$, $\left(e^{ln(x)}\right)' = (lnx)' \times e^{ln(x)} = 1$

Donc pour tout $x > 0$, $(lnx)' \times x = 1$ d'où

$(lnx)' = \frac{1}{x}$

La fonction ln est donc dérivable sur]0 ; +∞[et sa fonction dérivée est $\frac{1}{x}$

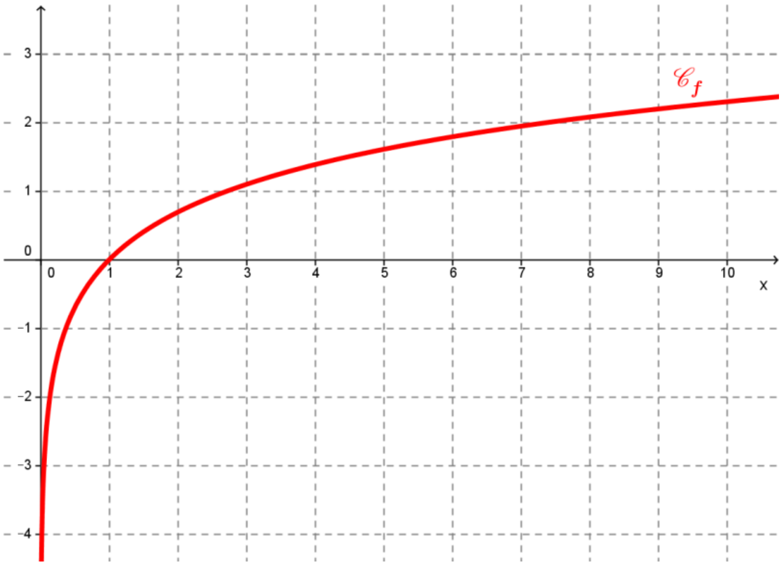
2) Tableau de variation et courbe représentative de la fonction logarithme népérien

a) Tableau de variation :

Les résultats précédents nous permettent d'écrire:

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$				+			
$f(x)$			0		1		

b) Courbe représentative de la fonction $\mapsto ln(x)$



IV) Résolution d'inéquations

Conséquences importantes:

Pour tout nombres A et B, comme la fonction logarithme népérien est croissante sur $\mathbb{R}$: $\ln(A) \leq \ln(B)$ équivaut à $A \leq B$

Exemples

Exemple 1 : Résoudre l'inéquation $\ln(2x) < \ln(x)$

x doit être strictement positif

$\ln(2x) < \ln(x)$ équivaut à $2x < x$ soit $x < 0$ ce qui est impossible donc

$S = \{\emptyset\}$

Exemple 2 :

Résoudre l'inéquation : $ln(x^2 - 2x + 1) > 0$
• $x^2 - 2x + 1$ doit être strictement positif (pour que $ln(x^2 - 2x + 1)$ ait un sens)

Tout d'abord étudions pour quelle(s) valeur(s) de x, $x^2 - 2x + 1 > 0$

Calculons le discriminant Δ (pour tout trinôme du second degré de la forme :$ax^2 + b^2 + c$

$\Delta = b^2 - 4ac$)

$\Delta = (-2)^2 - 4 = 0$

Comme $\Delta = 0$ alors $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ et a une unique solution : $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

Donc il faut que $x \neq 1$ pour que $ln(x^2 - 2x + 1)$ ait un sens

• Résolvons maintenant l'inéquation : $ln(x^2 - 2x + 1) > 0$ comme $0 = \ln(1)$ cette inéquation équivaut à :

$ln(x^2 - 2x + 1) > \ln(1)$ ce qui équivaut à :

$x^2 - 2x + 1 > 1$

$x^2 - 2x + 1 - 1 > 0$

$x^2 - 2x > 0$

$x(x-2) > 0$ faisons le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$			
$x-2$		$-$			0	$+$	
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x(x-2) > 0$ pour $x < 0$ et pour $x > 2$ (on n'oublie pas qu' il faut que $x \neq 1$ on vérifie que cela est compatible avec les solutions trouvées) donc :

$S =]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$

IV) Exemple d'étude de fonction:

Etudier la fonction f définie sur [0,5 ;10] par $f(x) = 5 - \frac{lnx}{x}$

a) La fonction f est définie et dérivable [1 ;10]

• Tout d'abord dérivons $\frac{lnx}{x} = \frac{u}{v}$ $\left(\frac{lnx}{x}\right)' = \frac{u'v-uv\prime}{v^2}$

$u(x) = \ln(x)$ $u'(x) = \frac{1}{x}$

$v(x) = x$ $v'(x) = 1$

$\left(\frac{lnx}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)\times 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

Donc $f'(x) = -\frac{1-\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(x)-1}{x^2}$

• $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in [0{,}5; 10]$ et $\ln(x) - 1 \geq 0$ pour $x \geq e$ et $lnx - 1 \leq 0$ pour $x \leq e$

Par conséquent : $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq e$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x \leq e$

• On obtient donc le tableau de variation :

x	0,5		e		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	6,39	↘	4,63	↗	4,77

$f(0{,}5) = 5 - \frac{\ln(0{,}5)}{0{,}5} = 5 + 2ln2 \approx 6{,}39$

$f(e) = 5 - \frac{\ln(e)}{e} = 5 - \frac{1}{e} \approx 4{,}63$

$f(10) = 5 - \frac{\ln(10)}{10} \approx 4{,}77$

• La courbe représentative de f est donc