Loi normale

I) Loi Normale centrée réduite N (0 ; 1)

1) Définition

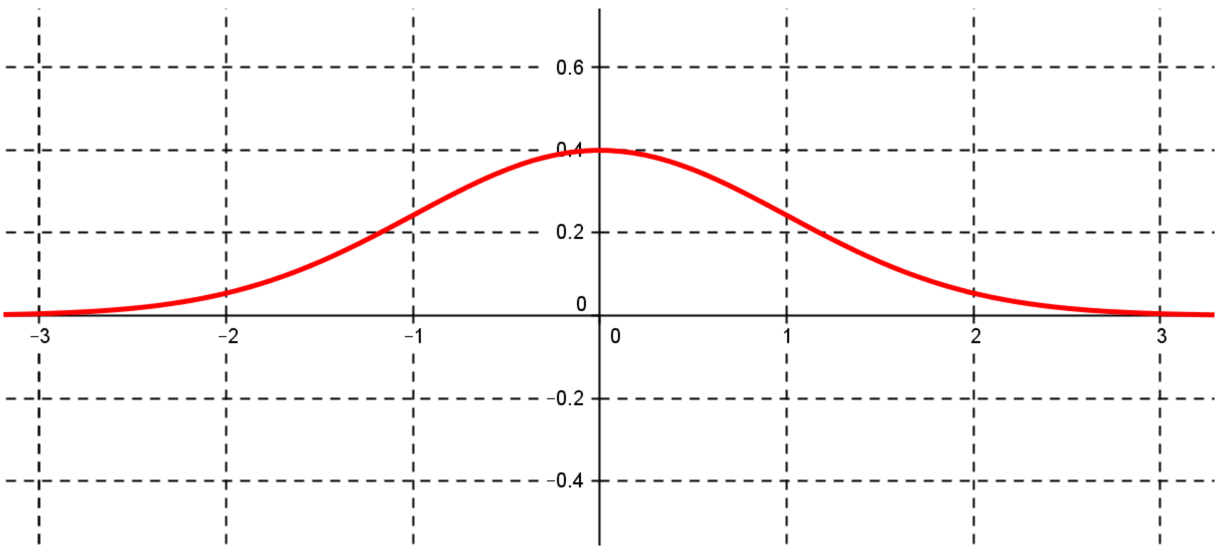
La loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}$ (0 ; 1) est la loi continue ayant pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Remarques :

- La fonction f est continue et à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$
- Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- L'aire du domaine situé sous la courbe et au-dessus de l'axe des abscisses vaut 1 (admis)
  Donc on peut en conclure que la fonction f peut bien être considérée comme densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Courbe de la fonction φ



2) Propriété

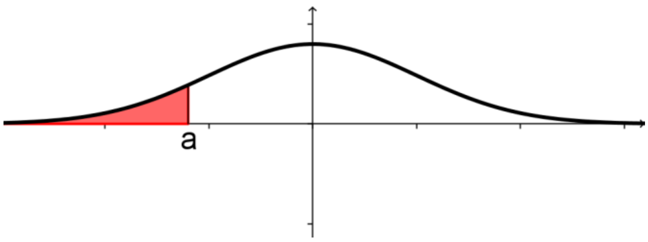
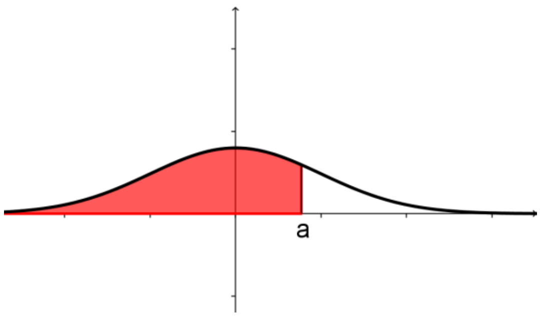
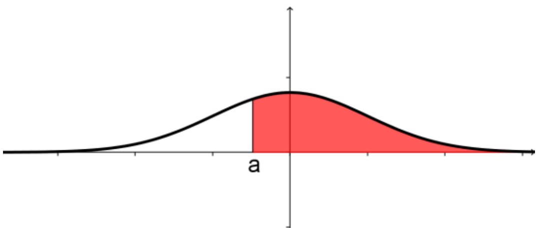
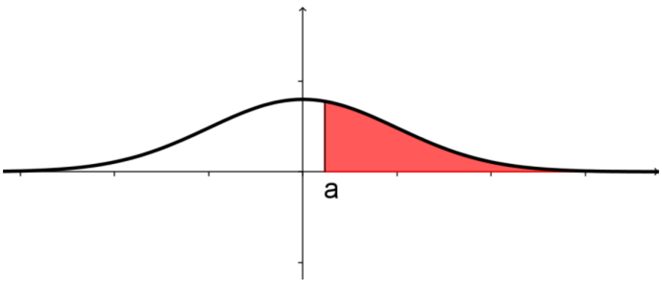
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite est 0 et son écart type est 1

3) Calculs de probabilités pour une variable aléatoire X suivant $\mathcal{N}$ (0 ; 1)

	Casio	Texas
Syntaxe	Touche **OPTN** puis choisir *STAT*, puis *DIST*, puis *NORM*	Menu distrib (2nde , var)
P(a < X < b)	Choisir **Ncd NormCD(a,b)**	**normalFrep(a,b)**
Nombre réel k tel que P(X<k)=c	Choisir InvN **InvNormCD(c)**	**FracNormale(c)**

Remarque : Comme la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées on a $P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = 0{,}5$

Pour calculer P(X < a) ou P (X > a) on peut donc utiliser la méthode suivante :

Probabilité	Graphique	Calcul
P(X<a), a <0		0,5− P (a<X<0)
P(X<a), a >0		0,5 + P (0<X<a)
P(X>a), a<0		0,5+P(a<X<0)
P(X>a), a > 0		0,5− P(0<X<a)

Exemple :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}$ (0 ; 1)

1) Calculer P(− 0,53 ≤ X ≤ 1,3)

Avec la calculatrice on obtient P(− 0,53 ≤ X ≤ 1,3) ≈ 0,60514

2) Calculer P (X ≤ 1,7)

Avec la calculatrice P (≤ 1,7)= 0,5 + P (0 ≤ X ≤ 1,7)

≈ 0,5 + 0,4554 ≈ 0,9554

II) Loi normale $\mathcal{N}$ (μ ; σ²)

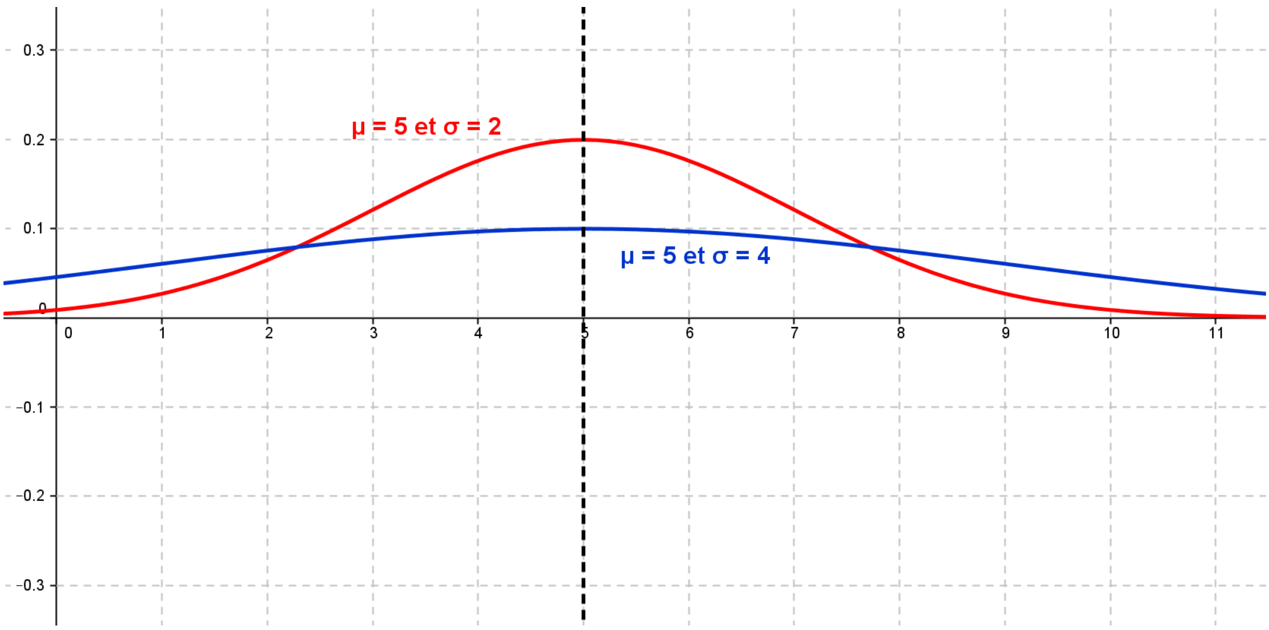
1) Définition

Soit μ un nombre réel et σ un réel strictement positif. La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}$ $(\mu\,;\,\sigma^2)$, si la variable $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}$ (0 ; 1)

Remarques :

1) La courbe représentative de la loi $\mathcal{N}$ $(\mu\,;\,\sigma^2)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$

2) Graphique illustrant l'influence de σ



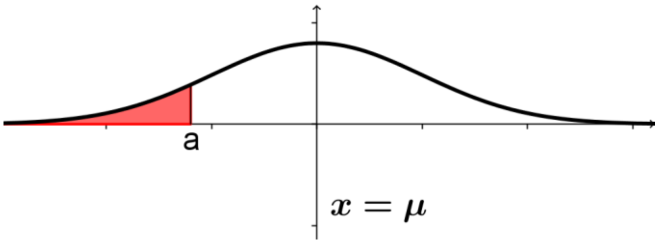
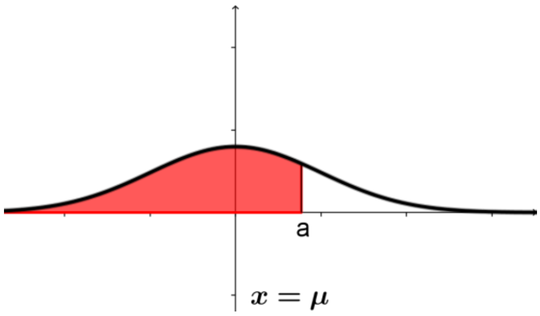
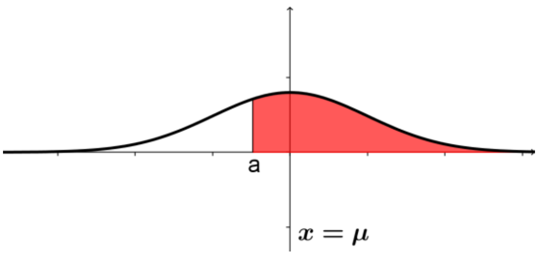
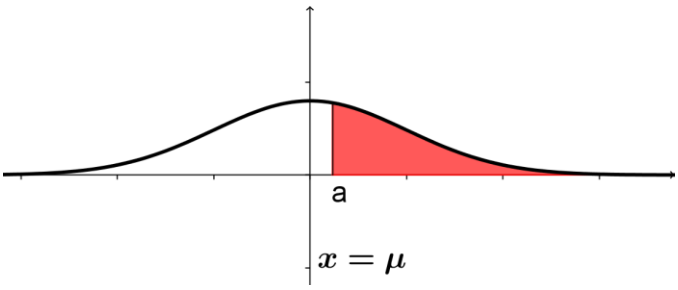
2)Calculs de probabilités pour une variable aléatoire X suivant $\mathfrak{N}$ (μ ; σ^2)

	Casio	Texas
Syntaxe	Touche **OPTN** puis choisir *STAT*, puis *DIST*, puis *NORM*	Menu distrib (2nde , var)
P(a < X < b)	Choisir Ncd **Ncd NormCD(a,b, σ, μ)**	**normalFrep(a,b,μ,σ)**
Nombre réel k tel que P(X<k)=c	Choisir InvN **InvNormCD(c,σ, μ)**	**FracNormale(c,μ,σ)**

Remarque : Comme la courbe de ***f*** est symétrique par rapport à la droite x = μ

on a $P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = 0,5$

Pour calculer P(X < a) ou P (X > a) on peut donc utiliser la méthode suivante

Probabilité	Graphique	Calcul
P(X<a), a < μ		0,5−P (a<X< μ)
P(X<a), a > μ		0,5 + P (μ <X<a)
P(X>a), a< μ		0,5+P(a<X< μ)
P(X>a), a > μ		0,5−P(μ <X<a)

3) Propriétés

1. **P($\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma$) $\approx$ 0,683**
2. **P($\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma$) $\approx$ 0,954**
3. **P($\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma$) $\approx$ 0,997**

4) Espérance mathématique et écart type

L'espérance mathématique d'une variable X qui suit la loi normale $\mathfrak{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ est μ et son écart type de de X est σ

Exemples de calculs

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathfrak{N}\,(\mu\,;\,\sigma^2)$.

Comme précédemment pour le calcul de probabilités on utilisera soit la calculatrice, soit une table de valeurs.

Sur une calculatrice, on peut calculer les probabilités P(a ≤ X ≤ b) pour a et b réels
en indiquant les valeurs de a, b , μ et σ (attention on indique σ et non σ^2)

Exemple : avec X suivant la loi $\mathfrak{N}\,(5\,;\,4)$ on obtient P(1,5 ≤ X ≤ 6)≈ 0 ,6514