Lois à densité sur un intervalle I

I) Définition

Soit X une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans un intervalle I = [a ;b] de $\mathbb{R}$.

On dit que X suit la loi à densité f Si :

- **f est continue sur l'intervalle I**
- **pour tout x de I, $f(x) \geq 0$;**
- **$\int_a^b f(x)dx = 1$ sur I**
- **pour tous réels c et d de I on a : $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t)dt$.**

La fonction f est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X

Exemples :

La durée de vie d'un transistor, le temps d'attente à un guichet sont des variables aléatoires continues.

Il n'est plus possible alors de définir la loi de X en énumérant les probabilités des événements $(X = x_i)$, puisque dans ce cas , ces événements sont en nombre infini. Une autre approche est alors nécessaire.

On s'intéresse à des événements du type : « X prend des valeurs comprises entre deux valeurs distinctes ».

On étudie uniquement les variables aléatoires continues dont la loi de probabilité est déterminée par une fonction f.

Exemple avec une fonction :

Soit X une variable aléatoire continue, soit f la fonction définie et continue sur [0 ;2] par $f(x) = \frac{x}{2}$.

- f est une fonction continue sur [0 ; 2]
- Pour tout $x \in [0;2]$ $f(x) \geq 0$

Soit $F(x)$ une primitive de f : $F(x) = \frac{x^2}{4}$

- $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{x}{2}\,dx = F(2) - F(0) = \frac{4}{4} - 0 = 1$
- pour tous réels c et d de l'intervalle [0 ;2] on a : $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t)dt$.

Donc f est une densité de probabilité de sa variable aléatoire X.

II) Propriétés

X une variable aléatoire qui suit une loi à densité f sur un intervalle I.

• pour tout réel c de I, $p(X = c) = 0$

• si A et B sont deux intervalles disjoints de I alors $p(X \in A \cup B) = p(X \in A) + p(X \in B)$.

• pour tout réel c de I $p(X < c) = p(X \leq c)$

Exemple :

Reprenons la fonction f de l'exemple ci-dessus, définie et continue sur [0 ;2] par $f(x) = \frac{x}{2}$

$F(x)$ une primitive de f est : $F(x) = \frac{x^2}{4}$

• Pour c réel appartenant à I : $p(X = c) = \int_c^c f(x)dx = F(c) - F(c) = 0$ donc $p(X = c) = 0$

• Soit A et B deux intervalles disjoints de I alors A et B sont de la forme : , $A = [0\ ;\ c]$ et $B = [c\ ;\ 2]$, c étant un réel appartenant à l'intervalle I

$A \cup B = [0; 2]$ donc $p(X \in A \cup B) = \int_0^2 f(x)dx$

De plus $p(X \in A) + p(X \in B) = \int_0^c f(x)dx + \int_c^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$ (relation de Chasles)

Donc $p(X \in A \cup B) = p(X \in A) + p(X \in B)$

• Pour tout réel c de l'intervalle [0 ; 2] :

$p(X < c) = p(X \leq c) - p(X = c) = p(X \leq c) - 0 = p(X \leq c)$

III) Espérance mathématique d'une variable aléatoire

1) Définition

X est une variable aléatoire de densité f sur $[a\ ;\ b]$. Alors l'espérance mathématique de X est le nombre réel E(X) défini par :

$$\mathbf{E}(X) = \int_a^b x \times f(x)dx$$

Remarque : L'espérance mathématique de la variable aléatoire correspond à la valeur moyenne prise par X sur l'intervalle I

2) Exemple

Soit X une variable aléatoire de densité , f étant la fonction sur [0 ;2] définie par $f(x) = \frac{x}{2}$. (en reprenant l'exemple précédent). L'espérance mathématiques de X est le nombre réel : E(X) $= \int_0^2 x \times f(x)dx = \int_0^2 x \times \frac{x}{2}dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx$

Soit G une primitive de la fonction g : $g(x) = \frac{x^2}{2}$

$G(x) = \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{x^3}{6}$ donc

E(X) $= G(2) - G(0) = \frac{2^3}{6} - 0 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

IV) Loi uniforme sur [a ; b]

1) Définition

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a\,;\,b]$ si elle admet comme densité de probabilité la fonction f définie sur $[a\,;\,b]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Exemples :

1) Si on choisit au hasard un nombre X dans l'intervalle [0 ; 1] la loi de la variable aléatoire correspondante est la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 1] ainsi :

La densité de X est $f(x) = 1$

- La probabilité $p(x < 0{,}7) = \int_0^{0{,}7} 1d(x) = 0{,}7$
- La probabilité $p(0{,}3 < X < 0{,}8) = \int_{0{,}3}^{0{,}8} 1d(x) = 0{,}5$

2) On peut estimer que le temps d'attente en minutes au guichet d'une poste est une variable aléatoire T qui suit une loi continue uniforme sur [0 ; 15] ainsi :
La densité de T est $f(x) = \frac{1}{15}$

- La probabilité p(T < 10) $= \int_0^{10} \frac{1}{15}\,dx = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
- La probabilité p(3 < T < 12) $= \int_3^{12} \frac{1}{15}\,dx = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$
- La probabilité p(T > 8) $= \int_8^{20} \frac{1}{15}\,dx = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

2) Espérance d'une loi uniforme

Si X suit une loi uniforme sur $[a\,;\,b]$, alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$

Exemples : En reprenant les deux exemples précédents on a :

1) $E(X) = \frac{1}{2}$

2) $E(X) = \frac{15}{2} = 7{,}5$ ce qui correspond au temps moyen passé au guichet de cette poste