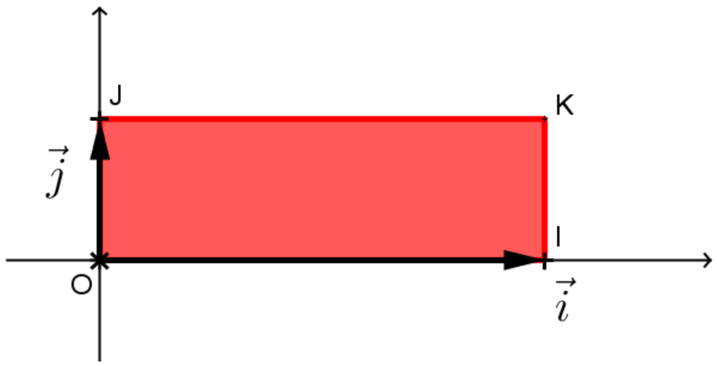
Notion d’intégrale, Propriétés

I) Intégrale et valeur moyenne :

1) Unité d’aire :

Soit $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthogonal. Soit I, J et K les points de coordonnées respectives (1 ; 0) , (0 ; 1) et (1 ; 1).

L’unité d’aire est l’aire du rectangle OIJK.

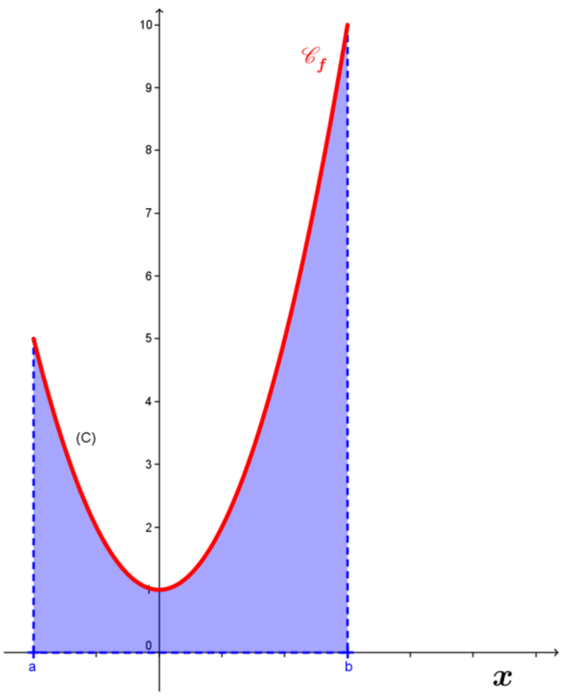


2) Intégrale d’une fonction positive et continue sur un intervalle [a ;b]:

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$. On note (C) sa courbe dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

L’intégrale de a à b de la fonction f, notée $\int_a^b f(x)dx$, est l’aire du domaine situé sous la courbe (C) , c’est à dire l’aire de l’ensemble des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$



Remarque :

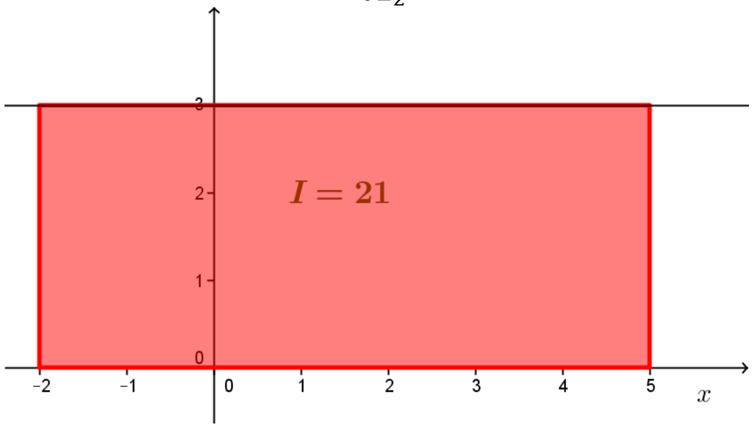
La variable x est dite muette, elle peut être remplacée par n'importe quelle lettre :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

Exemples :

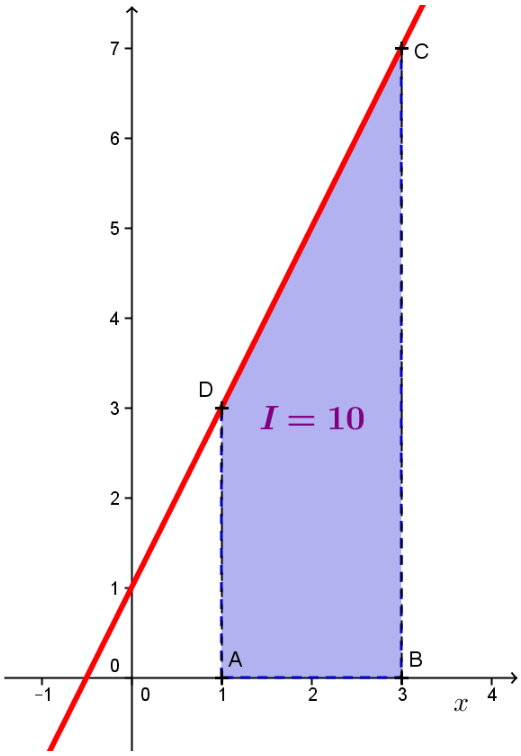
a) Fonction constante :

Soit f définie par $f(x) = 3$ sur $[-2\,;\,5]$. On a $\int_{-2}^{5} f(x)dx = 3\times7 = 21$ unités d'aire.



b) Fonction affine :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2t + 1$. On a $\int_1^3 f(t)dt = 10$ unités d'aires.
Cette intégrale représente l'aire du trapèze ABCD ci-dessous :



II) Propriétés des intégrales

1) Intégrale de b à a d'une fonction continue avec $b > a$.

Pour une fonction f continue et positive sur $[a\,;\,b]$, on a
$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Cas particulier : Si f est continue sur $[a\,;\,b]$ alors pour tout réel $c \in [a\,;\,b]$ on a $\int_c^c f(x)dx$ =0

2) Linéarité de l'intégrale :

Soient f et g des fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;\,b]$, pour tout réel k, on a :
$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ **et**

$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3) Positivité de l'intégrale:

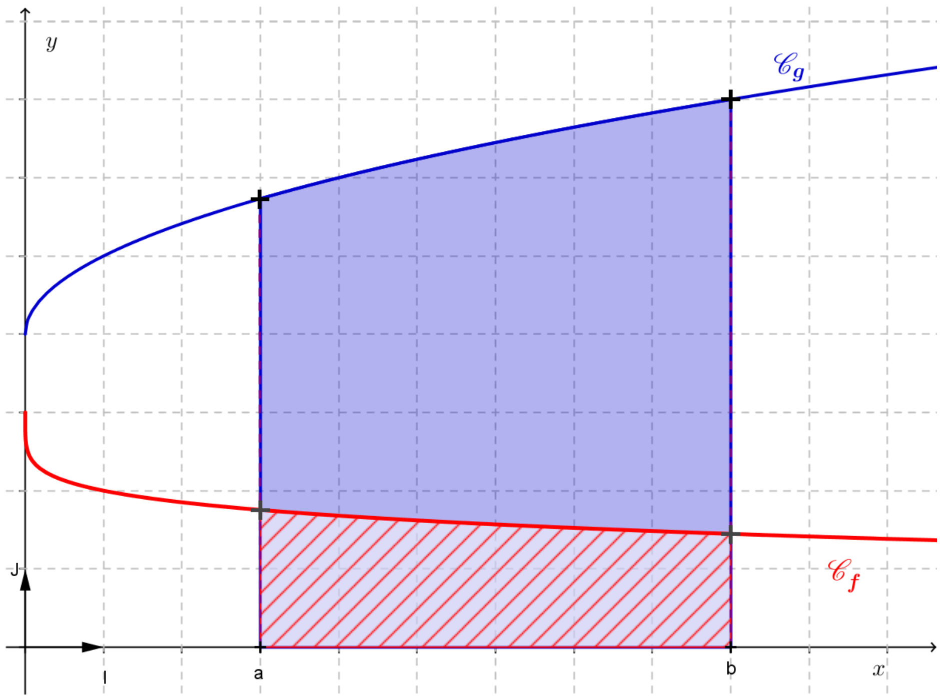
• **Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[\,a\,,b\,]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$**

4) Conservation de l'ordre :

Propriété 1 :

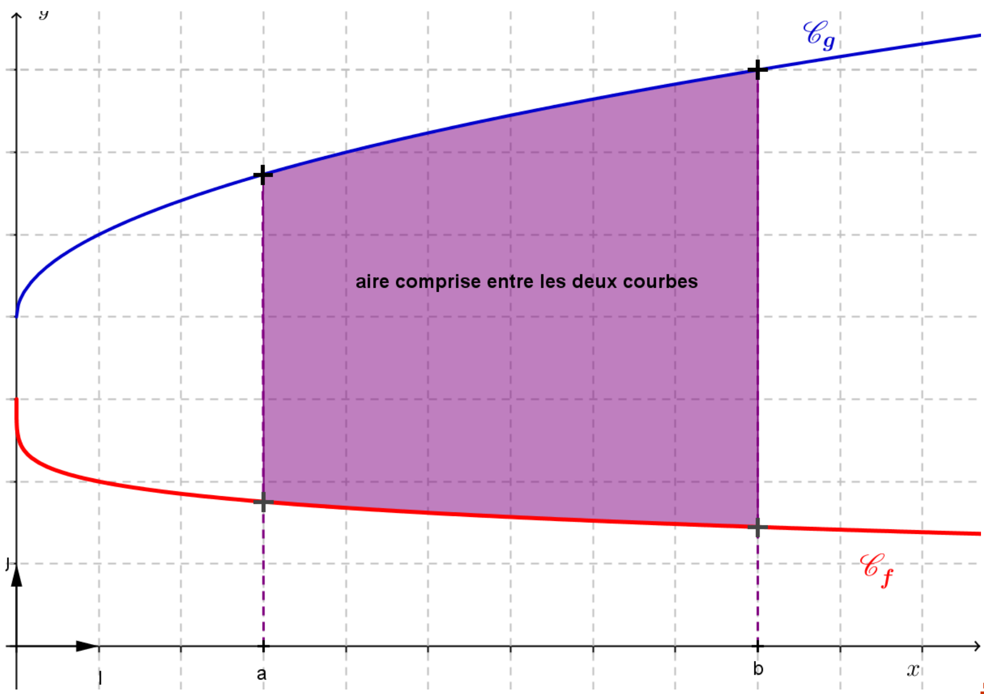
Soient f et g des fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;\,b]$,
Si $f \leq g$ sur l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ alors $\int_b^a f(x)dx \leq \int_b^a g(x)dx$

Remarque : Si $f \leq g$ alors l'aire sous la courbe représentative de f est inférieure à l'aire sous la courbe représentative de g :



Propriété 2 :

Soient f et g des fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;\,b]$ telles que $f(x) \leq g(x)$ sur l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ alors l'aire comprise entre les deux courbes est : $\int_b^a g(x)dx - \int_b^a f(x)dx$
c'est-à-dire $\int_b^{a[} g(x) - f(x)]dx$. Cela représente l'aire de l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tel que :$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$



5) Relation de Chasles:

Pour tout réel $c \in [a\,;\,b]$, on a : $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

III) Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

1) Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
La valeur moyenne de la fonction f sur $[a\,;\,b]$ est le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

2) Interprétation graphique :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$

On note λ la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

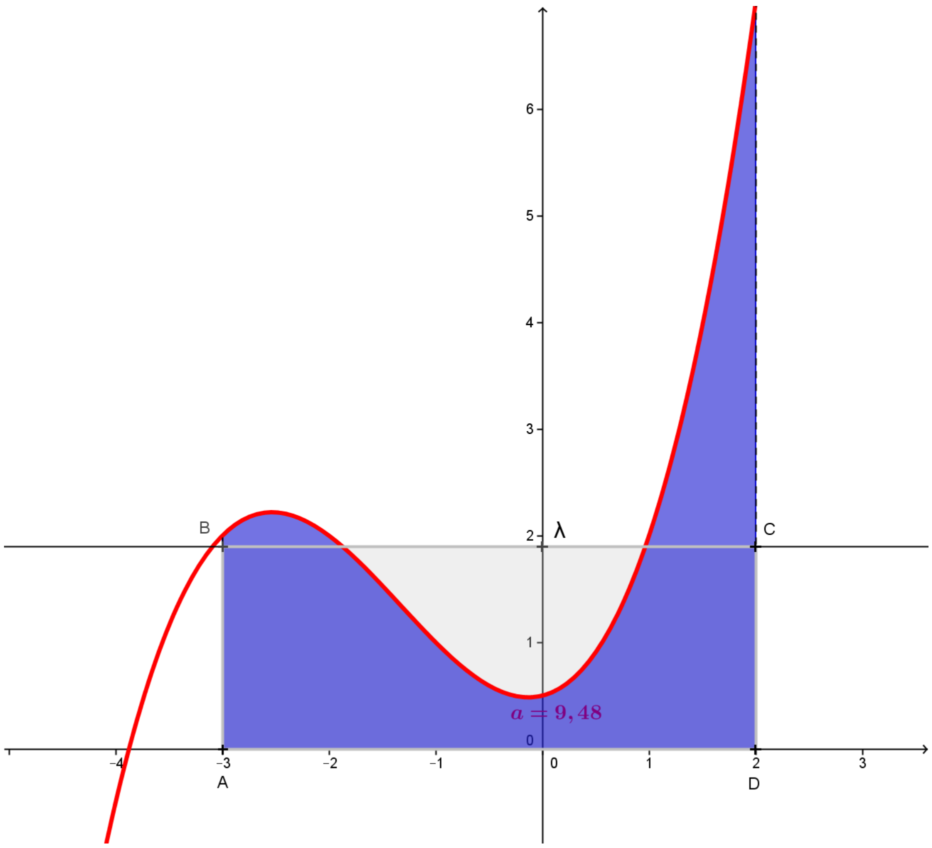
Comme $\lambda = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ On a alors :

$\int_a^b f(x)dx = \lambda(b - a)$.

Donc l'aire du domaine situé sous la courbe de f est égale à l'aire du rectangle de dimensions λ et $(b - a)$.

Sur la figure ci-dessous on a $\int_{-3}^{2} f(x)dx$ = 9,48 donc $\lambda = \frac{9{,}48}{5}$ = 1,896

L'aire coloriée en rose est égale à l'aire du rectangle ABCD

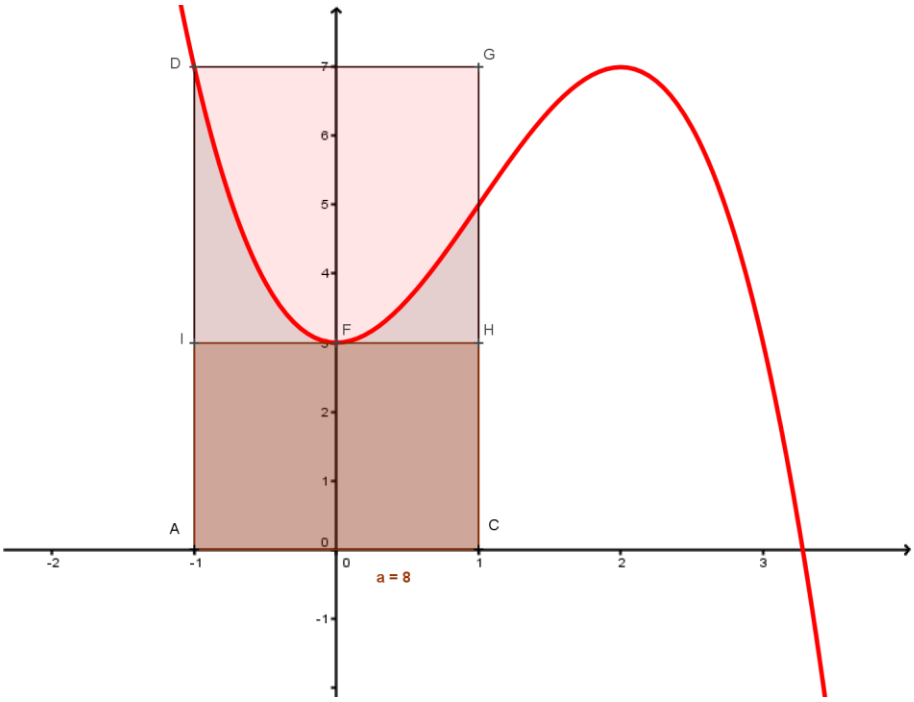


3) Inégalité de la moyenne :

Soit f une fonction continue, positive et bornée sur $[\,a\,;\,b\,]$ donc il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [\,a\,;\,b\,]$ $m \leq f\,(\,x\,) \leq M$ alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Interprétation graphique:



Sur la figure ci-dessus la fonction f est continue et bornée sur $[\,-1\,;\,1\,]$ par $m = 3$ et $M = 7$

Ainsi on a l'aire sous la courbe dans l'intervalle $[\,-1\,;\,1\,]$ ($\mathrm{I} = 8$) qui est comprise entre l'aire du rectangle ACHI et l'aire du rectangle ACGD :

$$3(1-(-1)) \leq \int_{-1}^{1} f(x)dx \leq 7(1-(-1))$$

$$6 \leq \int_{-1}^{1} f(x)dx \leq 14$$