Primitive et Calcul d'une intégrale

I) Primitive

1) Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée F' est égale à f.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 2$.

Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2x - 7$ et $G(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2x + 8$ sont des primitives de f.

2) Ensemble des primitives d'une fonction :

a) Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose qu'il existe une primitive F de f sur I.
L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$ où k décrit $\mathbb{R}$.

Remarques :

Si la fonction f admet une primitive sur un intervalle I alors elle en admet une infinité.

Soit G et F deux primitives de f sur I tels que $G(x) = F(x) + k$, alors dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de G est obtenue à partir de la courbe représentative de F par translation de vecteur $\vec{j}$.

b) Primitive prenant une valeur donnée en un réel donné :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f admet des primitives sur I. Soit x_0 et y_0 deux réels tels que $x_0 \in I$.

Il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$

Exemple :

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$

Déterminer la primitive F de f telle que $F(3) = -5$

On vérifie facilement que les primitives de f sont $F(x) = x^2 + 3x + k$, $k \in \mathbb{R}$

Si on veut $F(3) = -5$ alors $3^2 + 3 \times 3 + k = -5$ d'où $k = -23$

La primitive cherchée est donc $F(x) = x^2 + 3x - 23$

3) Primitives des fonctions usuelles :

Soit C un réel quelconque.

f **est définie sur** I **par** $f(x) =$	**Les primitives de** f **sur** I **sont définies par :** $F(x) =$	**L'intervalle** I **=**
k	$kx + C$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \geq 1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$\frac{1}{x^n} \quad (n \geq 2)$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$]0 ; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$ln(x) + C$	$]0 ; +\infty[$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$

4) Primitives et opérations sur les fonctions :

Propriétés de linéarité :

Soit F et G des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I alors :

- **F + G est une primitive de la fonction $f + g$ sur I ;**
- **Pour tout réel k, kF est une primitive de la fonction kf sur I.**

Exemples :

- Les primitives de $f(x) = 3x^2$ sont $F(x) = 3\frac{x^3}{3} + k = x^3 +\ \ , k \in \mathbb{R}$
- Les primitives de $f(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} - 2x$ sont sur $]0\ ;+\infty[$:

  $F(x) = \frac{3}{x} + 5\ln(x) - x^2 + k\ ,\ k \in \mathbb{R}$

<u>Primitives et composées de fonctions</u>

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	Primitives de f sur I	Condition sur u
$u'u^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	Aucune condition particulière
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*\ et\ n \neq 1)$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$ln(u) + C$	$u(x) > 0$
$u'e^u$	$e^u + C$	Aucune condition particulière

Exemples :

Pour chaque fonction f, déterminer ses primitives et en déduire une primitive sur l'intervalle I.

a) $f(x) = x^2(x^3 - 1)^5$; $I = \mathbb{R}$;

b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$; $I =]1\,;+\infty[$.

c) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$; $I =]2\,;+\infty[$;

d) $f(x) = \frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; $I =]0\,;+\infty[$.

Réponses :

a) $f(x) = x^2(x^3 - 1)^5$ en utilisant la formule $\boldsymbol{u'u^n}$ avec $u(x) = x^3 - 1$ on obtient :

$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{18}(x^3 - 1)^6 + C}$

b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ en utilisant la formule $\boldsymbol{\frac{u'}{\sqrt{u}}}$ avec $u(x) = x^2 - 1$ on obtient :

$\boldsymbol{F(x) = 3\sqrt{x^2 - 1} + C}$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ en utilisant la formule $\boldsymbol{\frac{u'}{u}}$ avec $u(x) = x^2 - 4$ on obtient :

$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 4) + C}$

d) $f(x) = \frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ en utilisant la formule $\boldsymbol{u'e^u}$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$ on obtient :

$\boldsymbol{F(x) = e^{\frac{1}{x}} + C}$

II) Calcul d'une intégrale :

1) Primitive d'une fonction continue :

a) Théorème :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si a est un réel de l'intervalle I alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Exemples :

Exemple 1 : Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+1}dt$.
Déterminer le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.

Réponse :

D'après ce qui précède F est l'unique primitive de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ qui s 'annule en $x = 0$

Donc $F'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et $F'(0) = 0$ donc $F'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et de ce fait F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Exemple 2 : Soit F la fonction définie sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,d\,t$

Déterminer le sens de variation de F sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$

Réponse :

F est l'unique primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ qui s 'annule en $x = 1$

Donc $F'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $F'(1) = 0$ donc $F'(x) \geq 0$ sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$ et de ce fait

F est strictement croissante sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$

Remarque $F\,(x) = ln(x)$

2) Intégrales et primitives :

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont deux réels de I.
Soit F une primitive de f sur I. On a $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Notation :

On écrit aussi $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$

Exemple 1 : Calculer $I = \int_1^3 x^3 dx$

Réponse :

$$I = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

Exemple 2 : Calculer $J = \int_1^e \frac{1}{x}\ln(x)\,dx$

Réponse :

$$J = \left[\frac{1}{2}\,(\ln(x))^2\right]_1^e = \frac{1}{2}\,((\ln(e))^2 - (\ln(1))^2) = \frac{1}{2}$$