Correction 1

Déterminons les valeurs des deux premières parenthèses :

- $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 1 - 4 - 9 + 16 = 17 - 13 = 4$
- $5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 = 25 - 36 - 49 + 64 = 89 - 85 = 4$

Dans l'énoncé, la suite logique proposée par les pointillés nous indique que toutes les parenthèses sont de la forme :
$$n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Cette expression admet pour simplification :
$$\begin{aligned} & n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 \\ &= n^2 - (n^2+2n+1) - (n^2+4n+4) + (n^2+6n+9) \\ &= n^2 - n^2 - 2n - 1 - n^2 - 4n - 4 + n^2 + 6n + 9 \\ &= 9 - 4 - 1 = 4 \end{aligned}$$

Pour connaître la valeur de la somme, il reste à connaître le nombre de parenthèses/termes compris dans cette somme.
Les premiers termes de ces parenthèses sont :
$$1 \ ; \ 5 \ ; \ 9 \ ; \ \dots \ ; \ 2009$$

Ceux sont les premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 4. Ainsi, le terme de rang n admet pour expression :
$$u_n = 1 + 4 \times n$$

Déterminons le rang du terme ayant 2009 pour valeur :
$$\begin{aligned} 2009 &= 1 + 4 \times n \\ 4 \times n &= 2009 - 1 \\ 4 \times n &= 2008 \\ n &= \frac{2008}{4} \\ n &= 502 \end{aligned}$$

Ainsi, le terme de valeur 2009 est le terme de rang 502.

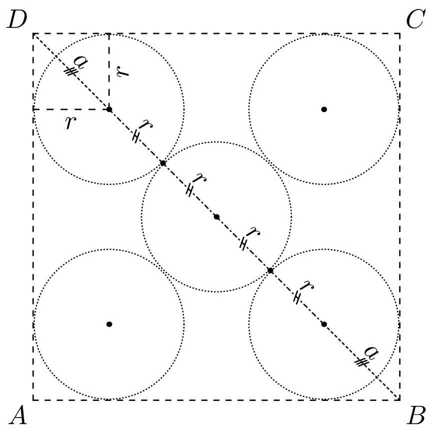
Cette somme comporte donc 503 termes.
Cette somme a pour valeur : $4 \times 503 = 2012$.

Correction 2

Utilisons les notations suivantes :

- Notons r le rayon de ces cinq cercles ;
- Notons a la diagonale du carré de côté r.

Voici une décomposition de la longueur de la diagonale $[BD]$.



La diagonale du carré a pour mesure : $BD = 2 \cdot a + 4 \cdot r$
où a est la diagonale d'un petit carré de côté r. Par le théorème de Pythagore, la longueur a vérifie :
$$\begin{aligned} a^2 &= r^2 + r^2 \\ a^2 &= 2 \cdot r^2 \\ \sqrt{a^2} &= \sqrt{r^2 \times 2} \\ a &= \sqrt{r^2} \times \sqrt{2} \\ a &= r \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

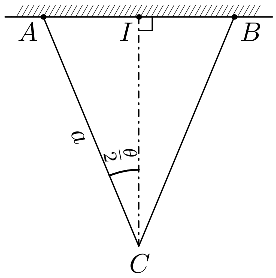
Ainsi, on a : $AC = 2\sqrt{2} + 4$

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B :
$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$

$ABCD$ étant un carré :
$$\begin{aligned} \big(2\sqrt{2}+4\big)^2 &= 2 \cdot BC^2 \\ \big[2 \cdot (\sqrt{2}+2)\big]^2 &= 2 \cdot BC^2 \\ 2^2 \cdot (\sqrt{2}+2)^2 &= 2 \cdot BC^2 \\ 4 \cdot (\sqrt{2}+2)^2 &= 2 \cdot BC^2 \\ 2 \cdot (\sqrt{2}+2)^2 &= BC^2 \\ BC &= \sqrt{2 \cdot (\sqrt{2}+2)^2} \\ BC &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\big(\sqrt{2}+2\big)^2} \\ BC &= \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}+2) \\ BC &= \big(\sqrt{2}\big)^2 + 2\sqrt{2} \\ BC &= 2 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Correction 3

Notons a la longueur AC et θ la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.



Notons I le pied de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.

Dans le triangle AIC rectangle en I, on a les rapports trigonométriques suivants :

- $$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{AI}{AC}$$
  $$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{AI}{a}$$
  $$AI = a \cdot \sin\frac{\theta}{2}$$
- $$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{IC}{AC}$$
  $$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{IC}{a}$$
  $$IC = a \cdot \cos\frac{\theta}{2}$$

Le triangle ABC étant isocèle en C, la hauteur (CI) est également la médiatrice. On en déduit que le point I est le milieu du segment $[AB]$:

$AB = 2{\times}AI = 2{\cdot}a$

Le triangle ABC a pour aire :

$$\mathcal{A} = \frac{AB{\times}IC}{2} = \frac{2{\times}a{\cdot}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right){\times}a{\cdot}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}$$
$$= a^2{\cdot}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right){\cdot}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

De la formule rappelée dans l'énoncé :

$$= a^2{\cdot}\frac{\sin\theta}{2}$$

La cloture mesurant $88\,m$, on en déduit la relation sur les longueurs du triangle ABC isocèle en C :

$$AC + CB = 88$$
$$a + a = 88$$
$$2a = 88$$
$$a = 44\,m$$

Ainsi, l'aire du triangle ABC s'exprime seulement en fonction de θ :

$$\mathcal{A} = a^2{\cdot}\frac{\sin\theta}{2} = 44^2{\times}\frac{\sin\theta}{2} = 968{\cdot}\sin\theta$$

On en déduit que l'aire du triangle ABC sera maximal lorsque le facteur $\sin\theta$ le sera également : la fonction sinus a pour valeur maximale 1 et ce maximum est atteint pour $x{=}\frac{\pi}{2}$.

Ainsi, le poulailler aura une aire maximal lorsqu'il formera un triangle isocèle rectangle. Son aire aura pour mesure :

$$\mathcal{A} = 968{\cdot}\sin\frac{\pi}{2} = 968\,m^2$$

Correction 4

1. a. L'écart entre les deux entiers 12 589 et 12 705 a pour valeur : $12\,589{-}12\,705{=}116$

   La division euclidienne de 116 par 29 donne :
   $$116 = 4{\times}29 + 0$$
   Ainsi, on peut passer de 12 589 à 12 705 en ajoutant exactement 4 fois l'entier 29.

   b. L'écart entre les deux entiers 1 485 et 310 190 a pour valeur : $310\,190{-}1\,485{=}308\,705$

   La division euclidienne de 308 705 par 29 donne la relation :
   $$308\,705 = 10\,645{\times}29 + 0$$
   On en déduit qu'on se peut se déplacer de l'entier 1 485 à l'entier 310 190 en comptant de 29 en 29.

2. La division euclidienne de 2013 par 29 donne la relation :
   $$2013 = 69{\times}29 + 12$$
   Ainsi, en choisissant l'entier 12, l'écart entre cet entier et 2 013 est de : $2\,013{-}12{=}2\,001$

   Et cet écart est un multiple de 29 :
   $$2\,013 - 12 = 69{\times}29$$
   On en déduit que le plus petit entier naturel à partir duquel il est possible d'atteindre 2 013 en comptant de 29 en 29 est l'entier 12.

3. Supposons qu'il existe un entier n inférieur à 2 013 tel que :

   - il soit possible en partant de n d'atteindre 2 013 en comptant de 29 en 29.
     C'est-à-dire qu'on a l'existence d'un entier naturel k vérifiant la relation :
     $$2\,013 = n + 29{\times}k$$
   - il soit possible en partant de n d'atteindre 2 013 en comptant de 31 en 31.
     C'est-à-dire qu'on a l'existence d'un entier naturel k' vérifiant la relation :
     $$2\,013 = n + 31{\times}k'$$

   Ainsi, les entiers k et k' doivent vérifier la relation :
   $$n + 29{\times}k = n + 31{\times}k'$$
   $$29{\times}k = 31{\times}k'$$
   D'après le produit en croix :
   $$\frac{29}{31} = \frac{k'}{k}$$
   Les entiers 29 et 31 étant deux entiers premiers, on en déduit que la fraction $\frac{29}{31}$ est une fraction irréductible.
   Ainsi, il existe un entier ℓ non-nul vérifiant les deux relations :
   $$k' = 29{\times}\ell \quad ; \quad k = 31{\times}\ell$$
   Etudions les différentes valeurs possibles de ℓ :

   - Pour $\ell{=}1$:
     On a : $k{=}31{\times}\ell{=}31{\times}1{=}31$
     De l'égalité :
     $$2\,013 = n + 29{\times}k$$
     $$2\,013 = n + 29{\times}31$$
     $$n = 2\,013 - 899$$
     $$n = 1\,114$$
   - Pour $\ell{=}2$:
     On a : $k{=}31{\times}\ell{=}31{\times}2{=}62$
     De l'égalité :
     $$2\,013 = n + 29{\times}k$$
     $$2\,013 = n + 29{\times}62$$
     $$n = 2\,013 - 1\,798$$
     $$n = 215$$
   - Pour $\ell{\geqslant}3$:
     $$\ell \geqslant 3$$
     $$31{\times}\ell \geqslant 31{\times}3$$
     $$k \geqslant 93$$
     $$29{\cdot}k \geqslant 29{\times}93$$
     $$29{\cdot}k \geqslant 2697$$
     $$-29{\cdot}k \leqslant -2697$$
     $$2013 - 29{\cdot}k \leqslant 2013 - 2697$$
     $$n \leqslant -84$$
     Or, n étant un entier naturel non-nul, on ne peut choisir ℓ supérieur ou égal à 3.

   Ainsi, tous les entiers recherchés sont :
   $$215 \quad ; \quad 1\,114$$

Correction 5

1. Déterminons le discriminant du polynôme du membre de gauche :
   $$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = \left(-\frac{37}{2}\right) - 4{\times}1{\times}85 = \frac{1369}{4} - 340$$
   $$= \frac{1369}{4} - \frac{1360}{4} = \frac{9}{4}$$
   On a la simplification : $\sqrt{\Delta}{=}\sqrt{\frac{9}{4}}{=}\frac{3}{2}$

   Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-\left(-\frac{37}{2}\right)-\frac{3}{2}}{2\times1} = \frac{\frac{37}{2}-\frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{34}{2}}{2} = \frac{17}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-\left(-\frac{37}{2}\right)+\frac{3}{2}}{2\times1} = \frac{\frac{37}{2}+\frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{40}{2}}{2} = \frac{10}{2}$$

2. a. Le rectangle ayant $37\,m$ de périmètre, on doit avoir :

$$2{\cdot}\big(L+\ell\big) = 37$$
$$L+\ell = \frac{37}{2}$$
$$\ell = \frac{37}{2} - L$$

b. Sachant que l'aire du rectangle est de $85\,m^2$, on a la relation :

$$L\times\ell = 85$$
$$L{\cdot}\Big(\frac{37}{2}-L\Big) = 85$$
$$\frac{37}{2}{\cdot}L - L^2 = 85$$
$$L^2 - \frac{37}{2}{\cdot}L + 85 = 0$$

D'après la question précédente, on a :

- $L = 10 \quad\Longrightarrow\quad \ell = \frac{17}{2}$
- $L = \frac{17}{2} \quad\Longrightarrow\quad \ell = 10$

Le rectangle a $\frac{17}{2}\,m$ pour longueur et $10\,m$ pour largeur.

