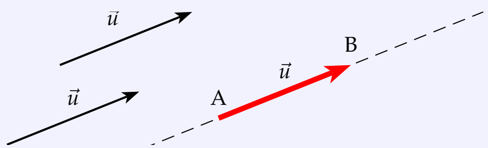
Les vecteurs

Le point de vue géométrique

Définition

Un vecteur $\vec{u}$ dont un représentant est le vecteur $\overrightarrow{AB}$, est une classe d'équivalence définie par :

- une direction : celle de la droite (AB)
- un sens : de A vers B
- une longueur appelé norme du vecteur $\vec{u}$ et notée $||\vec{u}||$ ou $||\overrightarrow{AB}||$. Il s'agit de la distance $AB \geqslant 0$

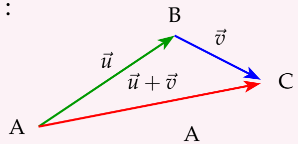


Remarque : Par abus de langage, on dira indistinctement le vecteur $\vec{u}$ ou le vecteur $\overrightarrow{AB}$

Somme de deux vecteurs – Relation de Chasles

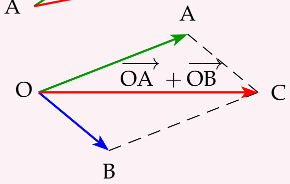
Pour additionner deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ on utilise la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Règle du parallélogramme

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$



L'addition de deux vecteurs est :

- commutative : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- associative : $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
- possède un élément neutre : $\vec{0}$
- tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ possède un opposé $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Application de la relation de Chasles

La relation de Chasles permet :

- d'« éclater » un vecteur en introduisant un point :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

- de réduire une somme :

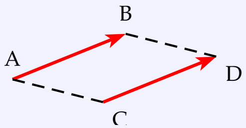
$$\underbrace{\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA}} + \overrightarrow{AP} = \underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP}} = \overrightarrow{MP}$$

La relation de Chasles est un outil fondamental pour montrer que des vecteurs sont colinéaires par exemple.

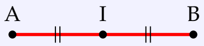
Égalité de deux vecteurs – Milieu d'un segment

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$

ABDC parallélogramme



I milieu du segment [AB]



$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

Milieu d'un segment

Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC].

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\\ &= 2\overrightarrow{AI} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}_{=\vec{0}}\\ &= 2\overrightarrow{AI}\end{aligned}$$

On retient : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

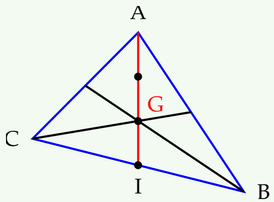
Centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle alors ses trois médianes sont concourantes au centre de gravité G.
Soit I le milieu de [BC], on a alors :

G centre de gravité $\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$



Multiplication par un scalaire

Soit k un réel, le vecteur $k\vec{u}$ correspond :

- à un vecteur de longueur $|k| \times ||\vec{u}||$
- de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$
- de sens contraire à $\vec{u}$ si $k < 0$

La multiplication par un réel est bilinéaire :

$$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} \quad \text{et} \quad (k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$$

Application du produit par un scalaire

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire ssi $\vec{v} = k\vec{u}, \ k \in \mathbb{R}$

A, B, C alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

(AB) // (CD) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires

Ces deux équivalences sont fondamentales en géométrie car elles s'utilisent très souvent !

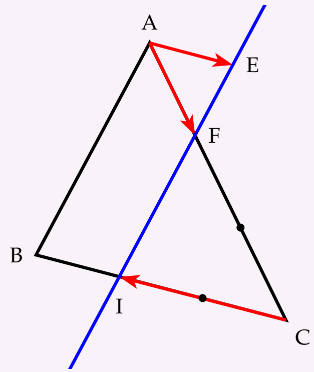
Un exemple d'application de la colinéarité

Soit ABC un triangle, E, I et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Démontrer que I, E et F sont alignés

Exprimons $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

- $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

  On en déduit que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BI}$ donc que AEIB est un parallélogramme.
  On a alors : $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$
  $= \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
  $= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$



On en déduit alors : $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EI}$. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires et donc les points E, F et I sont alignés.

Pour aller plus loin - Notion de barycentre

On appelle **barycentre** de deux points A et B associés aux coefficients α et β, le point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \alpha + \beta \neq 0 \qquad (1)$$

On note alors G barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β)

Remarque : Lorsque $\alpha = \beta$, on dit que G est l'**isobarycentre** des points A et B.
Le point G est alors le **milieu** du segment [AB].

De cette définition (1), on montre que $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$ (2)

Exemple : Soient A et B deux points.
Placer le barycentre G_1 des points pondérés respectifs (A, 2), (B, 1).

D'après (2), on a :
$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2+1}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Formule de réduction : Si G est le barycentre de (A, α) et (B, β) alors $\forall$ M :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$

Cette formule de réduction permet de déterminer les lignes de niveau c'est à dire de déterminer puis tracer l'ensemble des points M qui vérifient une relation vectorielle.

Exemple : Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient : $||2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}|| = 10$

Soit G barycentre de (A, 2) et (B, 3), on a alors : $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$
L'égalité devient : $||5\overrightarrow{MG}|| = 10 \Leftrightarrow MG = 2$

L'ensemble demandé est donc le cercle de centre G est de rayon 2.

De même, on définit le **barycentre G de 3 points pondérés** (A, α), (B, β) et (C, γ) :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \qquad \text{avec } \alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

Remarque : L'isobarycentre $(\alpha = \beta = \gamma)$ de trois points A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC.

On généralise avec n points pondérés :
Le barycentre G de (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_n, α_n) est défini par :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$$