Ex 43 :

On a : $(d):x+3y-1=0$ et $(d'):y=\frac{-1}{3}x+1$ donc $(d'):x+3y-3=0$

a) le vect-directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et celui de (d') est aussi $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ donc $(d)//(d')$

b) le vect-normal de (d) est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et celui de (d') est aussi $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ donc $(d)//(d')$

c) les équations cartésiennes de (d) et (d') sont identiques à une constante près donc $(d)//(d')$

Ex 44 :

Soit (d) la médiatrice de $[BC]$ donc un vecteur normal de (d) est $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$ donc $(d):-5x+6y+c=0$;

de plus le milieu $K(0{,}5;5)$ de $[BC]$ appartient à (d)

donc $-2{,}5+30+c=0$ donc $c=-27{,}5$ donc $(d):-5x+6y-27{,}5=0$

ainsi l'affirmation est FAUSSE

Ex 45 :

Cherchons la médiatrice (d) de $[DD']$

le vecteur normal de (d) est $\overrightarrow{DD'}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ donc $(d):3x+2y+c=0$

de plus le milieu $K(-1{,}5;3)$ de $[DD']$ appartient à (d)

donc $-4{,}5+6+c=0$ donc $c=-1{,}5$ donc $(d):3x+2y-1{,}5=0$

donc les points D et D' sont symétriques par rapport à (d)

ainsi l'affirmation est FAUSSE

Ex 46 :

a) Soit (C_1) le cercle de centre $C(4;2)$ et tangent à l'axe (Oy)
donc (C_1) passe par $A(0;2)$ et son rayon est $R=AC=4$
donc $(C_1):(x-4)^2+(y-2)^2=16$

b) Soit (C_2) le cercle de centre $D(-1;1)$ et tangent à l'axe (Ox)
donc (C_2) passe par $B(-1;0)$ et son rayon est $R'=BD=1$
donc $(C_2):(x+1)^2+(y-1)^2=1$

Ex 47 :

On sait que $(C):x^2+2x+y^2-2y-7=0$ soit $(C):(x+1)^2+(y-1)^2=3^2$

1) les coordonnées de A et B vérifient le système

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=9\\ x=1\end{cases} \text{ donc } \begin{cases}(y-1)^2=5\\ x=1\end{cases} \text{ donc } \begin{cases}x=1\\ y=1\pm\sqrt{5}\end{cases}$$

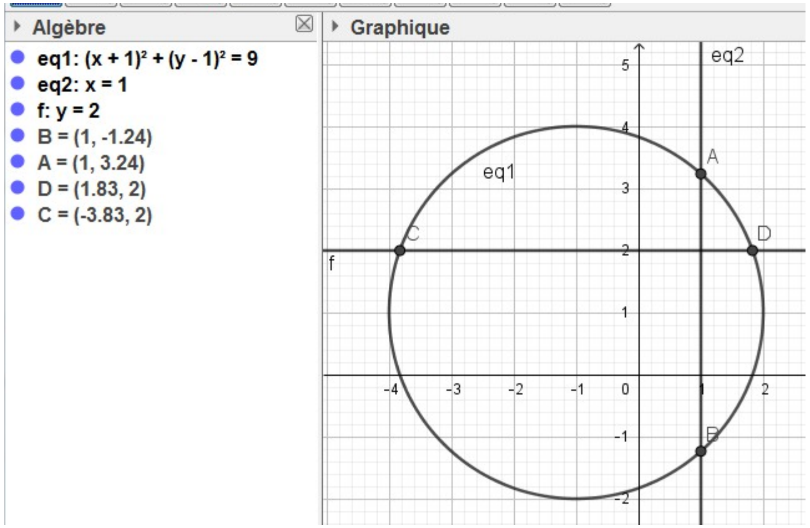
donc $A(1;1-\sqrt{5})$ et $B(1;1+\sqrt{5})$

2) les coordonnées de C et D vérifient le système

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=9\\ y=2\end{cases} \text{ donc } \begin{cases}(x+1)^2=8\\ y=2\end{cases} \text{ donc } \begin{cases}x=-1\pm2\sqrt{2}\\ y=2\end{cases}$$

donc $C(-1-2\sqrt{2};2)$ et $D(-1+2\sqrt{2};2)$

3) on vérifie facilement les résultats sur GEOGEBRA



Ex 49 :

1) $(C_1):x^2-6x+9+y^2=25$ donc $(C_1):(x-3)^2+y^2=5^2$ donc le centre de (C_1) est $\Omega(3;0)$ et le rayon est $R=5$

2) $(C_2):x^2+2x+y^2-2y+2=16$ donc $(C_2):(x+1)^2+(y-1)^2=4^2$ donc le centre de (C_2) est $\Omega(-1;1)$ et le rayon est $R=4$

3) $(C_3): x^2-10x+y^2+20y+125=121$
donc $(C_3):(x-5)^2+(y+10)^2=11^2$ donc le centre de (C_3) est $\Omega(5;-10)$ et le rayon est $R=11$

4) $(C_4): x^2+4x+y^2-8y=-16$ donc $(C_4):(x+2)^2+(y-4)^2=2^2$ donc le centre de (C_1) est $\Omega(-2;4)$ et le rayon est $R=2$

Ex 50 :

1) le projeté orthogonal de A sur (Δ) est $H(1;1)$ car $x_H=1$ et $y_H=y_A=1$

2) le projeté orthogonal de A sur (Δ) est $H(3;-2)$ car $y_H=-2$ et $x_H=x_A=3$

3) $(\Delta): x+y-2=0$; soit (d) la droite perpendiculaire à (Δ) passant par $A(-1;2)$ alors $(d): x-y+3=0$ donc le projeté orthogonal de A sur (Δ) est l'intersection de (d) et (Δ) ; ce point H vérifie le système $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=-3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2x=-1 \\ x-y=-3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=-0{,}5 \\ y=2{,}5 \end{cases}$ donc $H(-0{,}5;2{,}5)$

4) $(\Delta): 3x-5y+2=0$; alors $A(1;1)\in(\Delta)$ donc le projeté orthogonal de A sur (Δ) est le point A lui-même donc $H(1;1)$

Ex 52 :

On cherche la distance du point $B(4;0)$ à la droite $(D): 2x+y-1=0$

a) protocole de construction GEOGEBRA
- construire la droite (D)
- construire le point B
- construire la perpendiculaire à (D) passant par B , notée (d)
- déterminer le point H intersection de (d) et (D)
- déterminer la distance HB

b) La distance affichée n'est que la valeur approchée du résultat

c) on obtient $(d): x-2y-4=0$ donc le point H vérifie le système $\begin{cases} x-2y=4 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=1{,}2 \\ y=-1{,}4 \end{cases}$ donc $H(1{,}2;-1{,}4)$ donc $HB=\frac{7}{\sqrt{5}}$

Ex 53 :

1) La droite (AB) a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $(AB): x+3y-1=0$

2) $x_C+3y_C-1\neq 0$ donc $C\notin(AB)$

3) vecteur normal de la droite (AB) : $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4) par définition $(HC)\perp(AB)$ et $\vec{n}$ est orthogonal à (AB) donc $\overrightarrow{CH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc $\exists k\neq 0$: $\overrightarrow{CH}=k.\vec{n}$

5) $\overrightarrow{CH}\cdot\vec{n}=\pm\|\overrightarrow{CH}\|\times\|\vec{n}\|=\pm CH\times\sqrt{10}$ et
$\overrightarrow{CH}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix} x_H-x_C \\ y_H-y_C \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=(x_H-x_C)+3(y_H-y_C)=(x_H+3y_H)-(x_C+3y_C)$
donc $\overrightarrow{CH}\cdot\vec{n}=(1)-(x_C+3y_C)=-(x_C+3y_C-1)=-8$
donc $|-8|=|CH\times\sqrt{10}|$ donc $CH=\frac{8}{\sqrt{10}}\simeq 2{,}53$

<u>Note</u> : on en déduit la **formule générale** de la distance d'un point $A(x_A;y_A)$ à une droite $(d): ax+by+c=0$ --> $\delta=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Ex 55 :

1) le vecteur normal de (D_1) est $\vec{n}_1\begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix}$
le vecteur normal de (D_2) est $\vec{n}_2\begin{pmatrix} -15 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires donc $(D_1)//(D_2)$

3) on en déduit les solutions du système initial : $S=\emptyset$

Ex 56 :

le système $\begin{cases} -0{,}5x+0{,}75y-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2x-3y+12=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$
cela correspond à 2 droites sécantes donc il admet un point solution
on obtient $\begin{cases} 2x-3y+12=0 \\ 2x-2y+2=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} -y+10=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=9 \\ y=10 \end{cases}$
donc on déduit $S=\{(9;10)\}$

Ex 57 :

1) soit (d) la hauteur issue de C ; un vecteur normal de (d) est $\vec{AB}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ donc $(d):5x+6y+c=0$ or $C\in(d)$

donc $-5+30+c=0$ donc $c=-25$ donc $(d):5x+6y-25=0$

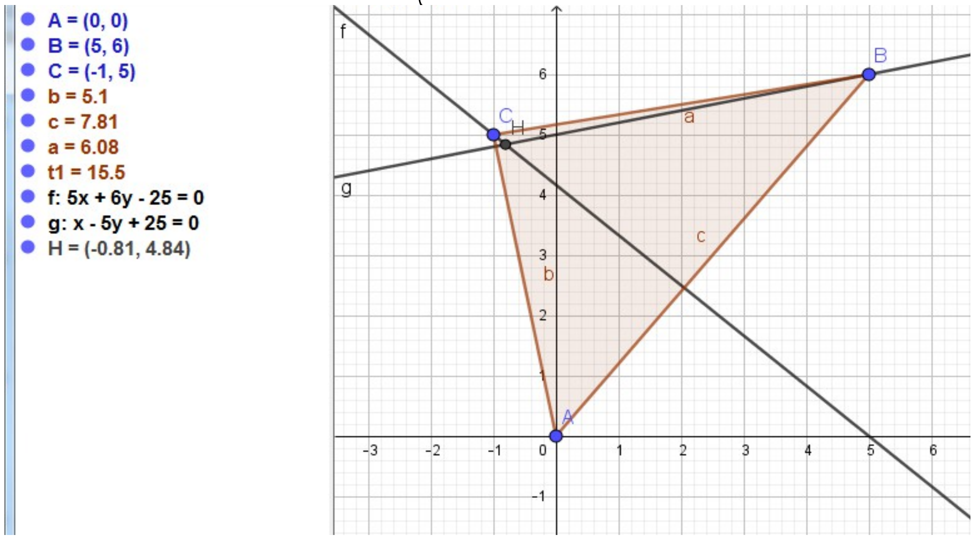
2) soit (d') la hauteur issue de B ; un vecteur normal de (d') est $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ donc $(d'):-x+5y+c=0$ or $B\in(d')$

donc $-5+30+c=0$ donc $c=-25$ donc $(d'):-x+5y-25=0$

3) l'orthocentre H du triangle ABC vérifie le système

$\begin{cases}5x+6y=25\\-x+5y=25\end{cases}$ donc $\begin{cases}5x+6y=25\\-5x+25y=125\end{cases}$ donc $\begin{cases}31y=150\\x=5y-25\end{cases}$

4) donc $\begin{cases}y=\dfrac{150}{31}\\x=5y-25\end{cases}$ donc $\begin{cases}y=\dfrac{150}{31}\\x=\dfrac{-25}{31}\end{cases}$ donc $H\left(\dfrac{-25}{31};\dfrac{150}{31}\right)$



Ex 59 :

$(D):x+y+1=0$; $B(3;0)$; $A(a;a)$

soit (d) la perpendiculaire à (D) passant par A ; (d) a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ donc $(d):-x+y+c=0$ et $A\in(d)$ donc $c=0$

donc $(d):x-y=0$

ainsi H vérifie le système suivant $\begin{cases}x+y+1=0\\x-y=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}2x+1=0\\y=x\end{cases}$

donc $\begin{cases}x=-0,5\\y=-0,5\end{cases}$ donc $H(-0,5;-0,5)$

ABH est isocèle en H si $HA^2=HB^2$

donc $(a+0,5)^2+(a+0,5)^2=3,5^2+0,5^2$ donc $2(a+0,5)^2=12,5$

donc $(a+0,5)^2=2,5^2$ donc $a+0,5=-2,5$ ou $a+0,5=2,5$

donc $a=-3$ ou $a=2$

on obtient donc 2 possibilités $A(-3;-3)$ ou $A(2;2)$

Ex 60 :

Soit $y=ax^2+bx+c$ l'équation cartésienne de la parabole (P)

$H(0;-2)\in(P)$ donc $c=-2$

$T(-2;0)\in(P)$ donc $4a-2b+c=0$ donc $4a-2b=2$ donc $2a-b=1$

$E(1;3)\in(P)$ donc $a+b+c=3$ donc $a+b=5$

on obtient le système : $\begin{cases}2a-b=1\\a+b=5\end{cases}$ donc $\begin{cases}2a-b=1\\3a=6\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$

donc on déduit que $(P):y=2x^2+3x-2$

Soit $M(x;y)\in(P)\cap(Ox)$ donc $\begin{cases}y=2x^2+3x-2\\y=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}2x^2+3x-2=0\\y=0\end{cases}$

donc $\begin{cases}x=-2 \quad ou\; x=0,5\\y=0\end{cases}$ donc $(P)\cap(Ox)=\{T(-2;0);F(0,5;0)\}$

Ex 61 :

Soit $y=ax^2+bx+c$ l'équation cartésienne de la parabole (P)

$S(0;4)\in(P)$ donc $c=4$

$A(1;2)\in(P)$ donc $a+b+c=2$ donc $a+b=-2$

de plus $B(-1;2)\in(P)$ par symétrie du point A par rapport à S

donc $a-b+c=2$ donc $a-b=-2$

on obtient le système : $\begin{cases}a-b=-2\\a+b=-2\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=-2\\b=0\end{cases}$

donc on déduit que $(P):y=-2x^2+4$