1ère Droites & Cercles – Niveau 3 – Correction 2020

Ex 62 :

Soit $y=ax^2+bx+c$ l'équation cartésienne de la parabole (P)

$B(0;4)\in(P)$ donc $c=4$

$S(1{,}5;6{,}25)\in(P)$ donc $2{,}25a+1{,}5b+c=6{,}25$ donc $2{,}25a+1{,}5b=2{,}25$

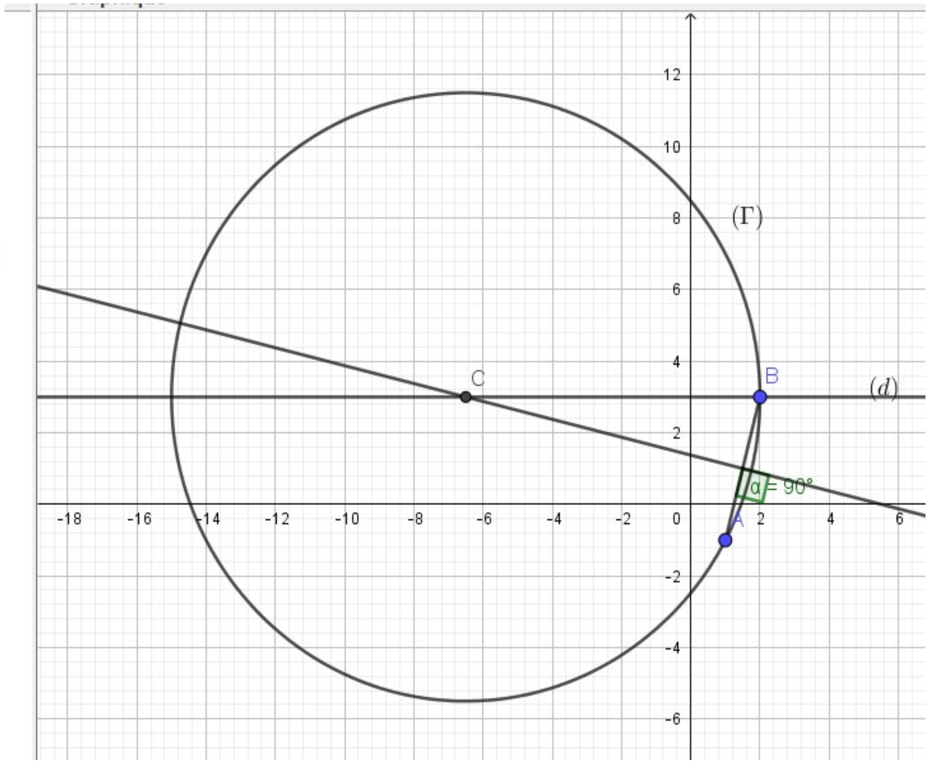
de plus $C(3;4)\in(P)$ par symétrie du point B par rapport à S
donc $9a+3b+c=4$ donc $9a+3b=0$

on obtient le système : $\begin{cases}2{,}25a+1{,}5b=2{,}25\\ 9a+3b=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}4{,}5a+3b=4{,}5\\ 9a+3b=0\end{cases}$

donc $\begin{cases}-4{,}5a=4{,}5\\ 3a+b=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=-1\\ b=3\end{cases}$

donc on déduit que $(P): y=-x^2+3x+4$

Ex 63 :



Soit (Δ) la médiatrice de $[AB]$
si $M(x;y)\in(\Delta)$ alors $AM=BM$ donc $AM^2=BM^2$
donc $(x-1)^2+(y+1)^2=(x-2)^2+(y-3)^2$
donc $x^2-2x+1+y^2+2y+1=x^2-4x+4+y^2-6y+9$
donc $(\Delta): 2x+8y-11=0$

Soit $C(x;y)\in(d)\cap(\Delta)$ donc $y=3$ et $2x+24-11=0$
donc $x=-6{,}5$ et $y=0$ donc $C(-6{,}5;3)$

Le cercle (Γ) a pour équation réduite $(x+6{,}5)^2+(y-3)^2=r^2$ où $r=AC$
or $r^2=(-6{,}5-1)^2+(3+1)^2=72{,}25$ d'où $(\Gamma):(x+6{,}5)^2+(y-3)^2=8{,}5^2$
le cercle (Γ) a pour centre $C(-6{,}5;3)$ et pour rayon $r=8{,}5$

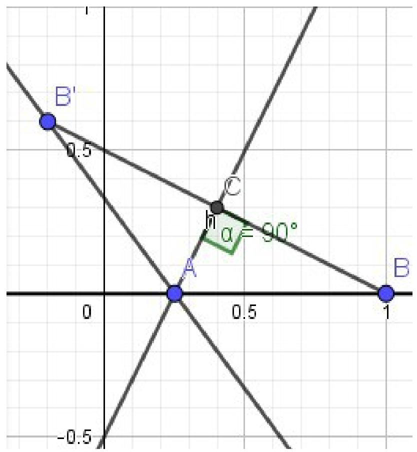
Ex 64 :

<u>Algorithme en langage naturel :</u>

- Si $a\times x_M+b\times y_M+c=0$ alors afficher " *impossible !* "
- Sinon
  - afficher le vecteur normal de (d) : $\vec{n}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$
  - afficher l'équation cartésienne de $(d): a'x+b'y+c'=0$
  - afficher " $a'=-b$ "
  - afficher " $b'=a$ "
  - afficher " $c'=b\times x_M-a\times y_M$ "

Ex 68 :

figure ci-contre



1) Soit $A(x;y)\in(d)\cap(Ox)$
donc $2x-y=0{,}5$ et $y=0$
donc $x=0{,}25$ et $A(0{,}25;0)$

2) $B(1;0)\in(Ox)$

3) soit $B'(x';y')$ le symétrique de B par rapport à (d) ; le vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$
donc $\overrightarrow{BB'}$ est orthogonal à $\vec{u}$

donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix}x'-1\\y'-0\end{pmatrix}=0$ donc $1(x'-1)+2(y'-0)=0$

donc $x'+2y'=1$

de plus le milieu de $[BB']$ appartient à (d)

donc $2\left(\frac{x'+1}{2}\right)-\left(\frac{y'}{2}\right)=0{,}5$ donc $2x'-y'=-1$

d'où le système $\begin{cases}x'+2y'=1\\2x'-y'=-1\end{cases}$ donc $\begin{cases}x'+2y'=1\\4x'-2y'=-2\end{cases}$

donc $\begin{cases}x'+2y'=1\\5x'=-1\end{cases}$ donc $\begin{cases}x'+2y'=1\\2x'-y'=1\end{cases}$ donc $\begin{cases}x'=-0{,}2\\2x'-y'=-1\end{cases}$

donc $\begin{cases}x'=-0{,}2\\y'=0{,}6\end{cases}$ donc $B'(-0{,}2\,;0{,}6)$

4) ainsi la droite (Δ) passe par $A(0{,}25\,;0)$ et $B'(-0{,}2\,;0{,}6)$
soit $M(x\,;y)\in(\Delta)$ donc $det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB'})=0$

donc $\begin{vmatrix}x-0{,}25 & -0{,}2-0{,}25\\y-0 & 0{,}6-0\end{vmatrix}=0$ donc $0{,}6(x-0{,}25)-y(-0{,}45)=0$

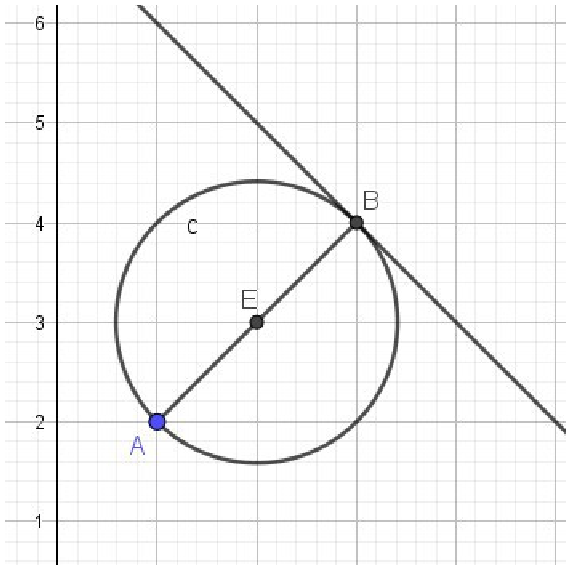
donc on obtient : $(\Delta):4x+3y-1=0$

Ex 70 :

Soit B le point d'intersection entre (C) et (D)
alors B appartient à la droite (d) perpendiculaire à (D) passant par A

on a $(d):x-y+c=0$ et $A(1\,;2)\in(d)$ donc $1-2+c=0$
donc $c=1$

et on déduit que $(d):x-y+1=0$
ainsi $B(x\,;y)$ vérifie le système
$\begin{cases}x-y=-1\\x+y=7\end{cases}$ donc $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$
et $B(3\,;4)$



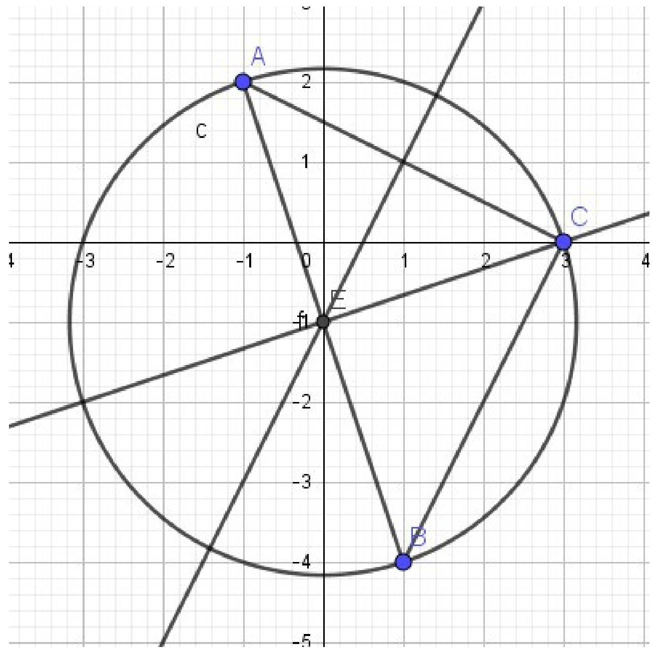
le centre de (C) est donc le milieu de $[AB]$: $E(2\,;3)$

le rayon de (C) est $r=EB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
d'où l'équation de $(C):(x-2)^2+(y-3)^2=2$

<u>*Rque*</u> : La distance du point $A(1\,;2)$ à la droite $(D):x+y-7=0$ est :
$\delta=\frac{|1+2-7|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ ainsi le cercle (C) tangent à la droite (D) passant par A a pour rayon $r=\frac{\delta}{2}=\sqrt{2}$

Ex 72 :

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires ; donc les points A, B, C ne sont pas alignés



2) la médiatrice (d) de $[AB]$ passe par $E(0\,;-1)$, milieu de $[AB]$ et possède un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ donc $(d):x-3y-3=0$

3) la médiatrice (d') de $[AC]$ passe par $F(1\,;1)$, milieu de $[AC]$ et possède un vecteur normal $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ donc $(d'):2x-y-1=0$

4) le centre Ω du cercle (C) est donc le point d'intersection des 2 médiatrices (d) et (d') soit $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ donc $\Omega(0;-1)$

5) le rayon de (C) est $r=\Omega A=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

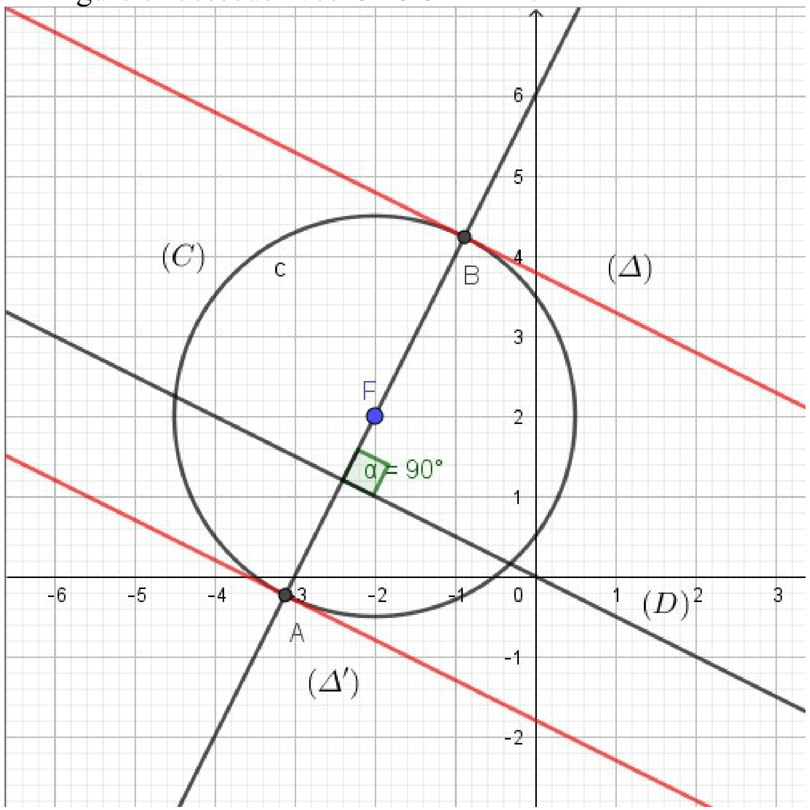
6) l'équation réduite du cercle (C) est : $x^2+(y+1)^2=10$

Ex 75 :

- on donne $A(x_A;y_A), O(x_O;y_O)$ et R
- calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$
- déterminer les coordonnées de B telles que $B\in[OA]$ et $OB=R$
- la distance cherchée est donc $\delta=AB$

Ex 76 :

On obtient la figure ci-dessous avec GEOGEBRA :



Protocole de construction :

- construire le cercle (C) , la droite (D) et le point F
- construire la perpendiculaire à (D) passant par F
- celle-ci coupe (C) aux points A et B
- construire les parallèles à (D) passant par A et B

équation du cercle (C) : $(x+2)^2+(y-2)^2=6{,}25$
équation de la droite (D) : $x+2y=0$
équation de la droite $(d)\perp(D)$, $F(-2;2)\in(d)$: $(d): -2x+y-6=0$
en effet, $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est directeur de (D) donc $\vec{u}$ est normal à (d)
ainsi $(d): -2x+y+c=0$ or $F(-2;2)\in(d)$ donc $4+2+c=0$ et $c=-6$

intersection de (C) et (d) : $M(x;y)\in(d)\cap(C)$ vérifie le système

$\begin{cases}(x+2)^2+(y-2)^2=6{,}25\\ -2x+y-6=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}(x+2)^2+(y-2)^2=6{,}25\\ y=2x+6\end{cases}$

donc $\begin{cases}(x+2)^2+(2x+4)^2=6{,}25\\ y=2x+6\end{cases}$ donc $\begin{cases}5x^2+20x+13{,}75=0\\ y=2x+6\end{cases}$

or $5x^2+20x+13{,}75=0$ possède 2 racines : $x_A=\dfrac{-4-\sqrt{5}}{2}$, $x_B=\dfrac{-4+\sqrt{5}}{2}$

donc $(C) et (d)$ se coupent en $A(\dfrac{-4-\sqrt{5}}{2};2-\sqrt{5})$ et $B(\dfrac{-4+\sqrt{5}}{2};2+\sqrt{5})$

on en déduit les équations des droites parallèles à (D) et tangentes à (C) :

- tangente à (C) en A : $(\Delta'): x+2y-2+2{,}5\sqrt{5}=0$
- tangente à (C) en B : $(\Delta): x+2y-2-2{,}5\sqrt{5}=0$

Ex 78 :

soit la parabole $(P): y=-0{,}5(x+3)(x-2)$ soit $(P): y=-0{,}5x^2-0{,}5x+3$

le sommet de (P) est donc $A(-0{,}5;3{,}125)$
les racines du trinôme $-0{,}5x^2-0{,}5x+3$ sont $x_B=-3$ et $x_C=2$
donc on déduit que (P) et l'axe (Ox) se coupent en $B(-3;0)$, $C(2;0)$

on a : $AB^2=2{,}5^2+3{,}125^2=\dfrac{1025}{64}$, $AC^2=2{,}5^2+3{,}125^2=\dfrac{1025}{64}$, $BC^2=25$

donc ABC est isocèle en A

son aire vaut $aire_{ABC}=\dfrac{AH\times BC}{2}=\dfrac{3{,}125\times 5}{2}=7{,}8125$

Ex 79 :

on note $(P_m): y=mx^2-2x+4$ et $(D_m): y=2m$

soit $M(x;y)\in(P_m)\cap(D_m)$: $\begin{cases} y=mx^2-2x+4 \\ y=2m \end{cases}$

donc $mx^2-2x+4=2m$ soit $mx^2-2x+4-2m=0$

son discriminant vaut $\Delta_m=4-4\mathrm{m}(4-2m)=8m^2-16m+4=4(2m^2-4m+1)$

or les racines du trinôme $2m^2-4m+1$ sont $m_1=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $m_2=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

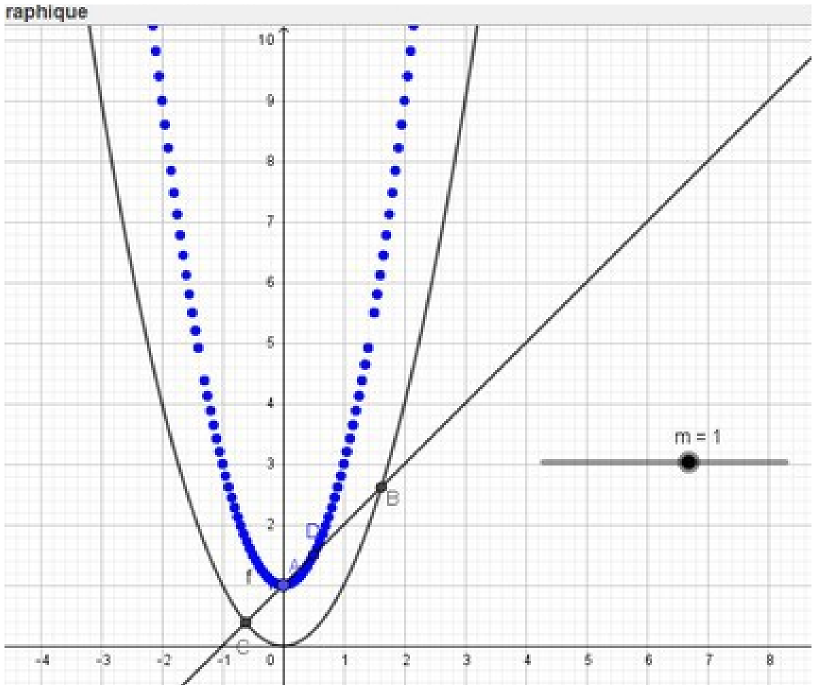
on déduit que :

- si $m=m_1$ ou $m=m_2$ alors (P_m) et (D_m) possèdent 1 point d'intersection
- si $m<m_1$ ou $m>m_2$ alors (P_m) et (D_m) possèdent 2 points d'intersection
- si $m_1<m<m_2$ alors (P_m) et (D_m) ne possèdent aucun point d'intersection

Ex 80 :

soit $(P): y=x^2$ et $(D_m): y=mx+1$ avec $A(0;1)\in(D_m)$

on obtient la figure ci-dessous



on conjecture ainsi que le milieu I de $[BC]$ suit une parabole (P')

les points B et C vérifie le système $\begin{cases} y=x^2 \\ y=mx+1 \end{cases}$ soit $x^2-mx-1=0$

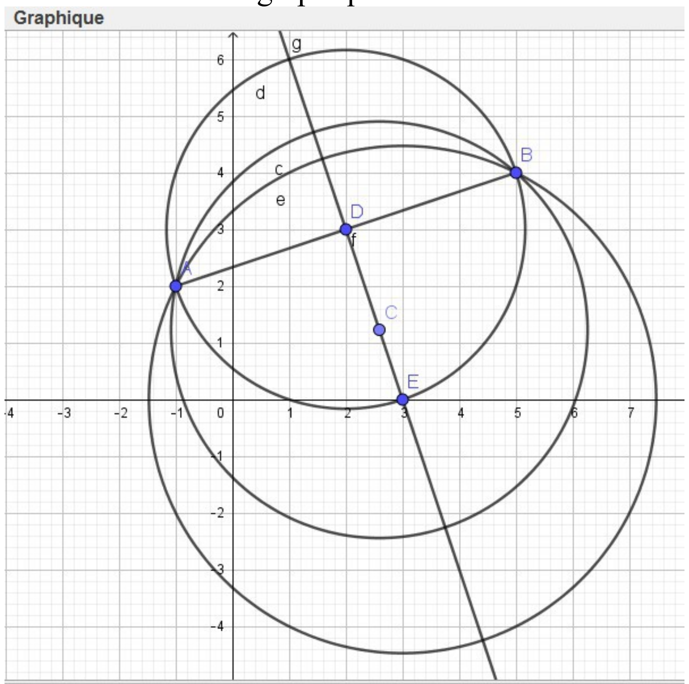
son discriminant vaut $\Delta_m=m^2+4>0$

donc l'équation $x^2-mx+1=0$ possède 2 racines $x_B=\dfrac{m-\sqrt{m^2+4}}{2}$ et $x_C=\dfrac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}$ donc la parabole (P) et la droite (D_m) se coupent toujours en 2 points B et C avec $y_B=(x_B)^2=\dfrac{m^2+2-m\sqrt{m^2+4}}{2}$ et $y_C=(x_C)^2=\dfrac{m^2+2+m\sqrt{m^2+4}}{2}$ par ailleurs I est le milieu de $[BC]$ donc les coordonnées de I vérifient : $x_I=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{m}{2}$ et $y_I=\dfrac{y_b+y_C}{2}=\dfrac{m^2}{2}+1$

ainsi $m=2x_I$ donc $y_I=\dfrac{(2x_I)^2}{2}+1$ soit $y_I=2x_I^2+1$

on en déduit que $I\in(P')$ avec $(P'): y=2x^2+1$

Ex 82 : on obtient le graphique ci-dessous



on conjecture que l'ensemble des centres L passant par A et B est la médiatrice (d) du segment $[AB]$

soit L le centre du cercle (C) passant par A et B
donc $LA=LB$ donc L est équidistant de A et B
donc $L(x\,;y)\in(d)$

réciproquement l'équation de la médiatrice de $[AB]$ est $(d):-3x-y+9=0$
soit $L(x\,;y)\in(d)$ donc $y=-3x+9$

ainsi $LA^2=(x+1)^2+(-3x+9-2)^2=(x+1)^2+(3x-7)^2=10x^2-40x+50$
et $LB^2=(x-5)^2+(-3x+9-4)^2=(x-5)^2+(3x-5)^2=10x^2-40x+50$
donc $LA^2=LB^2$ et alors $LA=LB$
donc L est bien le centre du cercle (C) passant par A et B

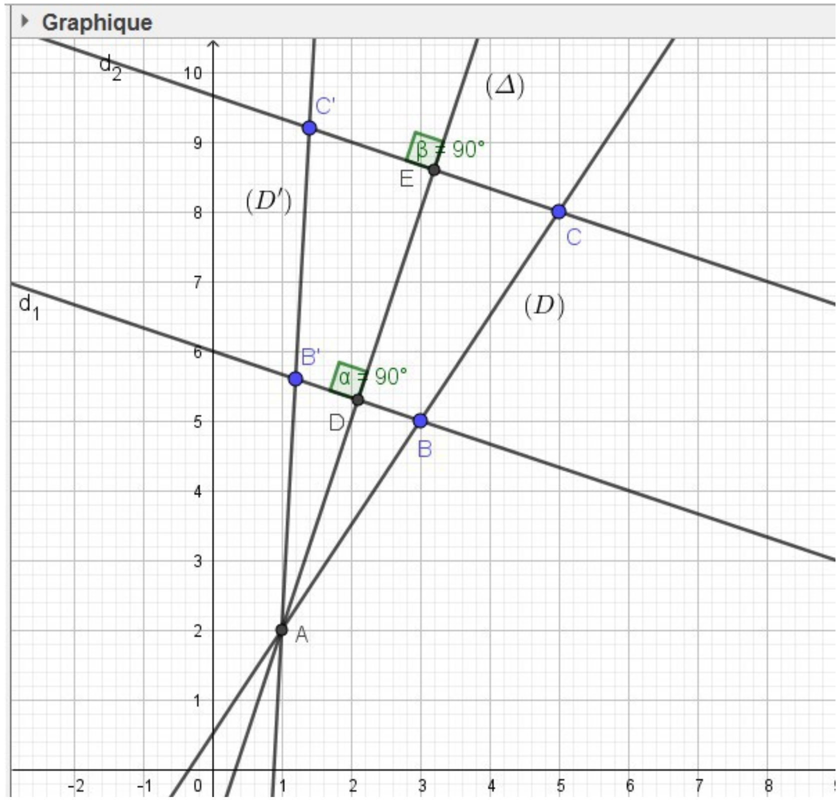
Ex 84 :
l'intersection de (D) et (Δ) est $A(1\,;2)$
Soit $B(3\,;5), C(5\,;8)\in(D)$; on cherche alors les symétriques B', C' de B, C par rapport à (Δ) ;
en effet si $s_{(\Delta)}(D)=(D')$ alors $B', C'\in(D')$

soit (d_1) la droite perpendiculaire à (Δ) passant par B
on a : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ directeur de (Δ) donc normal à (d_1)
donc $(d_1): x+3y+c=0$; or $B(3\,;5)\in(d_1)$ donc $c=-18$
donc $(d_1): x+3y-18=0$
soit (d_2) la droite perpendiculaire à (Δ) passant par C
de même on obtient $(d_2): x+3y-29=0$

soit $D(x\,;y)$ l'intersection de (d_1) et (Δ) donc $\begin{cases}x+3y=18\\ y=3x-1\end{cases}$
donc $x+3(3x-1)=18$ donc $x=2{,}1\,;y=5{,}3$ soit $D(2{,}1\,;5{,}3)$

soit $E(x\,;y)$ l'intersection de (d_2) et (Δ) donc $\begin{cases}x+3y=29\\ y=3x-1\end{cases}$
donc $x+3(3x-1)=29$ donc $x=3{,}2\,;y=8{,}6$ soit $E(3{,}2\,;8{,}6)$

ainsi D est le milieu de $[BB']$ et E est le milieu $[CC']$
on vérifie que $B'(1{,}2\,;5{,}6)$ et $C'(1{,}4\,;9{,}2)$
donc $(D')=(B'C'): 18x-y-16=0$



Ex 85 :
Soit (C) le cercle passant par $A(-5\,;6), B(11\,;2), C(-3\,;-1)$

le centre D de ce cercle (C) est l'intersection des médiatrices (d) (du segment $[AC]$) et (d') (du segment $[BC]$)

on vérifie que l'équation de (d) est : $-2x+7y-25{,}5=0$
on utilise le vecteur normal $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$ et le milieu de $[AC]$: $I(-4\,;2{,}5)$

de même l'équation de (d') est : $14x+3y-57{,}5=0$
on utilise le vecteur normal $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-14\\-3\end{pmatrix}$ et le milieu de $[BC]$: $J(4\,;0{,}5)$
le centre D est donc l'intersection de (d) et (d')
soit $\begin{cases}-2x+7y=25{,}5\\ 14x+3y=57{,}5\end{cases}$ donc $\begin{cases}-14x+49y=178{,}5 & (L_1)\\ 14x+3y=57{,}5 & (L_2)\end{cases}$

$(L_1)+(L_2)$ donne : $52y=236$ donc $y=\dfrac{59}{13}$

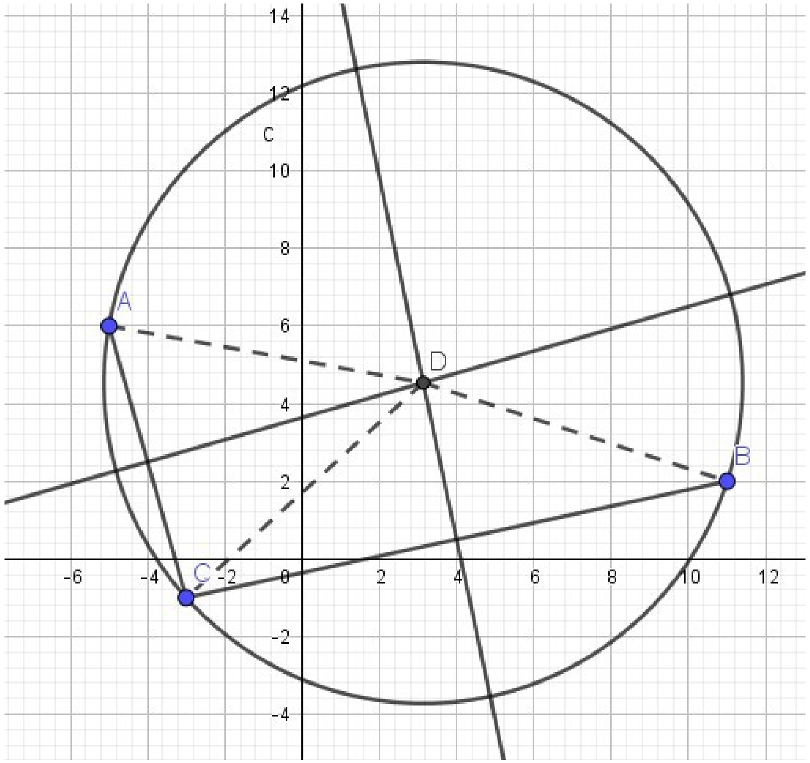
d'où on déduit que $-2x+\dfrac{413}{13}=25{,}5$ donc $x=\dfrac{163}{52}$ donc $D(\dfrac{163}{52};\dfrac{59}{13})$

enfin le rayon de (C) est $r=DA=DB=DC$

donc $r^2=(-5-\dfrac{163}{52})^2+(6-\dfrac{59}{13})^2=\dfrac{184705}{2704}$

d'où l'équation réduite de $(C):(x-\dfrac{59}{13})^2+(y-\dfrac{163}{52})^2=\dfrac{184705}{2704}$

figure de la situation :



Ex 90 :

Soit $(P): y=ax^2+bx+c$ une parabole

$A(1;-1)\in(P)$ donc $a+b+c=-1$

$B(-1;9)\in(P)$ donc $a-b+c=9$

$C(3;5)\in(P)$ donc $9a+3b+c=5$

On obtient le système $\begin{cases} a+b+c=-1 & (L_1)\\ a-b+c=9 & (L_2)\\ 9a+3b+c=5 & (L_3)\end{cases}$ donc $\begin{cases} a+b+c=-1 & (L_1)\\ 2b=-10 & (L_1-L_2)\\ 9a+3b+c=5 & (L_3)\end{cases}$

donc $\begin{cases} a+c=4 & (L_1)\\ b=-5 & (L_2)\\ 9a+c=20 & (L_3)\end{cases}$ donc $\begin{cases} a+c=4 & (L_1)\\ b=-5 & (L_2)\\ 8a=16 & (L_3-L_1)\end{cases}$ donc $\begin{cases} a=2 & (L_1)\\ b=-5 & (L_2)\\ c=2 & (L_3)\end{cases}$

d'où on déduit que $(P): y=2x^2-5x+2$

Ex 86 :

cercle $(C_1): x^2+y^2=16$ de centre $A_1(0;0)$ et de rayon $r_1=4$

cercle $(C_2): x^2+y^2-8x-6y+16=0$

donc $(C_2):(x-4)^2+(y-3)^2=9$ de centre $A_2(4;3)$ et de rayon $r_2=3$

soit $B(x;y)$ le point d'intersection de (C_1) et (C_2)

donc on déduit que $\begin{cases} x^2+y^2-16=0 & (L_1)\\ x^2+y^2-8x-6y+16=0 & (L_2)\end{cases}$

donc $\begin{cases} x^2+y^2=16 & (L_1)\\ -8x-6y+32=0 & (L_2-L_1)\end{cases}$ donc $\begin{cases} x^2+y^2=16 & (L_1)\\ 4x+3y-16=0 & (L_2)\end{cases}$

donc $\begin{cases} 9x^2+9y^2=144 & (L_1)\\ 3y=-4x+16 & (L_2)\end{cases}$ donc $\begin{cases} 9x^2+9y^2=144 & (L_1)\\ 9y^2=(-4x+16)^2 & (L_2)\end{cases}$

donc $\begin{cases} 9x^2+(4x-16)^2=144 & (L_1)\\ 3y=-4x+16 & (L_2)\end{cases}$ donc $\begin{cases} 25x^2-128x+112=0 & (L_1)\\ 3y=-4x+16 & (L_2)\end{cases}$

donc $\begin{cases} x=4 \ \ ou \ \ x=1{,}12 & (L_1)\\ 3y=-4x+16 & (L_2)\end{cases}$ donc $\begin{cases} x=4 \ \ ou \ \ x=1{,}12 & (L_1)\\ y=0 \ \ ou \ \ y=3{,}84 & (L_2)\end{cases}$

ainsi $(C_1)\cap(C_2)=\{\ B_1(4;0)\ ; B_2(1{,}12;3{,}84)\ \}$

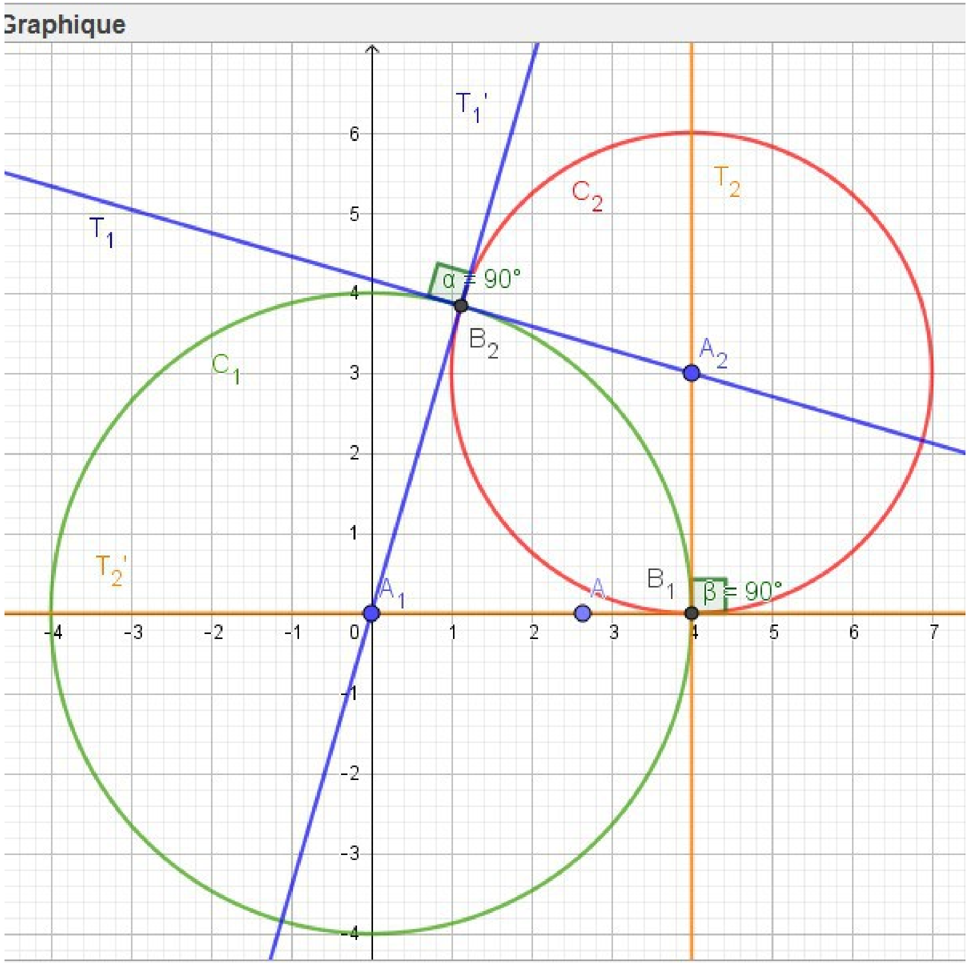
soit (T_1) la tangente à (C_1) en B_1

soit (T_1') la tangente à (C_2) en B_1

soit (T_2) la tangente à (C_1) en B_2

soit (T_2') la tangente à (C_2) en B_2

figure de la situation :



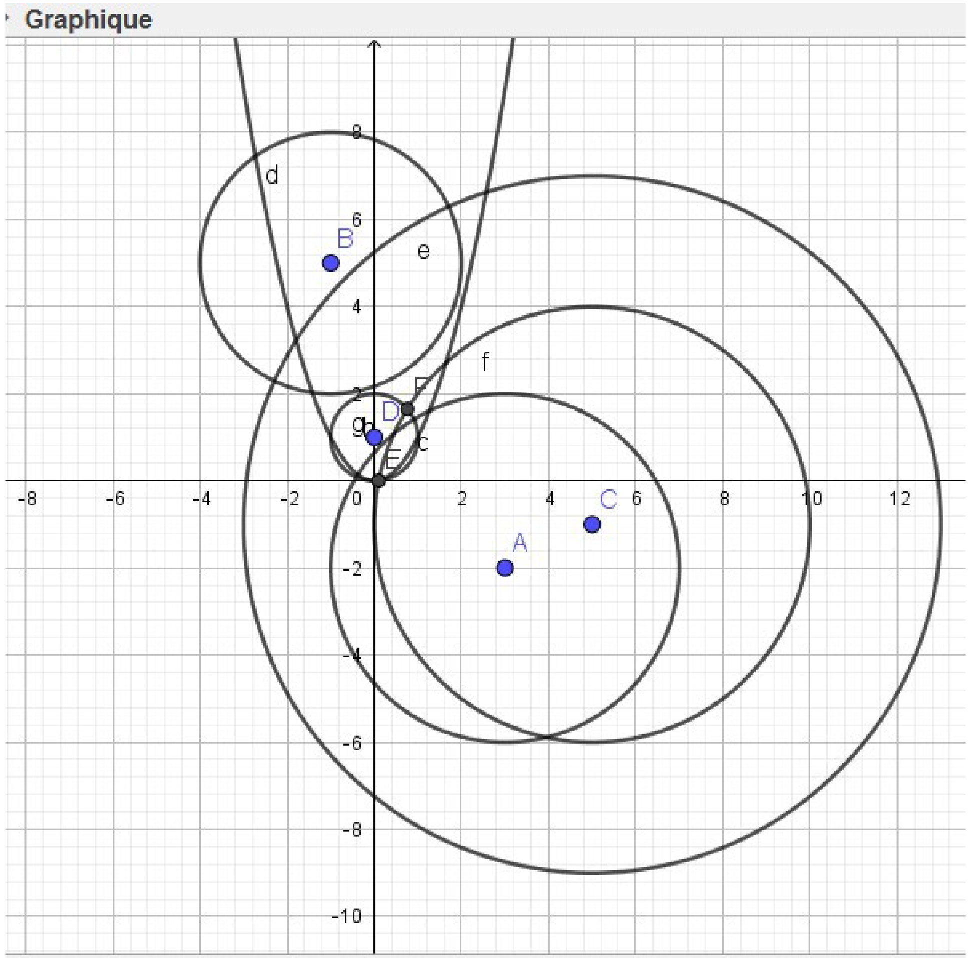
on vérifie facilement que :

- $(T_1): -2{,}88\,x + 0{,}84\,y = 0$
- $(T_1'): -0{,}84\,x - 2{,}88\,y = -12$
- $(T_2): x = 4$
- $(T_2'): y = 0$

donc on déduit que :
- $(T_1) \perp (T_1')$
- $(T_2) \perp (T_2')$

Ex 89 :

figure de la situation :



1) disque intérieur de centre $A(3\,;-2)$ et de rayon $r=4$
2) part du disque positif de centre $B(-1\,;5)$ et de rayon $r=3$
3) trace de la parabole dans le disque de centre $C(5\,;-1)$ et de rayon $r=8$
4) trace du cercle de centre $D(0\,;1)$ dans le disque de centre $C(5\,;-1)$ et de rayon $r=5$

Ex 91 : exercice "*hors-programme*" corrigé ultérieurement ...