Ex 59 :

1) MDC est équilatéral donc $\widehat{IDM}=\frac{\pi}{3}$ donc $\widehat{ADM}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

DAM est isocèle en D donc $\widehat{DAM}=\frac{\pi-\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{5\pi}{12}$

donc $\widehat{MAJ}=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$

2) $IM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $MJ=a-\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AM^2=(\frac{a}{2})^2+(a-\frac{a\sqrt{3}}{2})^2$

donc $AM^2=\frac{a^2}{4}+a^2+\frac{3a^2}{4}-\sqrt{3}a^2=(2-\sqrt{3})a^2$

donc $AM=\sqrt{2-2\sqrt{3}}\,a$

3) $\cos(\frac{\pi}{12})=\cos(\widehat{MAJ})=\frac{AJ}{AM}=\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}\,a}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$

donc $\cos(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2(4-3)}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

en effet $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2=2+\sqrt{3}$

et $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2=2+6+2\sqrt{12}=8+4\sqrt{3}=4(2+\sqrt{3})$

donc $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}{4}=(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2$ donc $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

4) on déduit alors que

$\sin^2(\frac{\pi}{12})=1-\cos^2(\frac{\pi}{12})=1-\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}{16}=\frac{16-(8+4\sqrt{3})}{16}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

donc $\sin(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ car $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

Ex 61 :

1) $\cos(24°)=\frac{NU}{RN}$ donc $RN=\frac{10}{\cos(24°)}\simeq 10{,}94\,m$

2) $MR^2=MN^2+NR^2=64+10{,}94^2=183{,}68$ donc $MR\simeq 13{,}55\,m$

3) $MU^2=MN^2+NU^2=64+100=164$ donc $MU=\sqrt{164}=2\sqrt{41}\,m$

4) $\cos(\alpha)=\frac{MU}{MR}=\frac{2\sqrt{41}}{13{,}55}\simeq 0{,}945$

5) donc $\alpha=\cos^{-1}(0{,}945)\simeq 19°$

Ex 58 :

la surface de l'aire en rouge vaut :

$A_r=2\times 25\pi\times\frac{25}{360}+\frac{10\cos(25°)\times 5\sin(25°)}{2}=\frac{125\pi}{36}+\frac{25\sin(50°)}{2}\simeq 20{,}48\,cm^2$

la surface de l'aire en vert vaut :

$A_v=\frac{25\pi}{2}-A_r=\frac{325\pi}{36}-\frac{25\sin(50°)}{2}\simeq 18{,}78\,cm^2$

donc $A_r>A_v$

on vérifie facilement que cette inégalité n'est pas toujours vraie selon le rayon R

Ex 76 :

$a\in[0;\frac{\pi}{2}]$ et $b\in[-\pi;-\frac{\pi}{2}]$

1) on pose α tel que $\cos(\alpha)=0{,}25$ ($\alpha\simeq 1{,}318\,rad$)

alors $\cos(a)=0{,}25$ donne $\begin{cases} a=\alpha \\ ou\ \ a=-\alpha\end{cases}$ donc $S=\{-\alpha;\alpha\}$

2) on pose β tel que $\sin(\beta)=-0{,}3$ ($\beta\simeq -0{,}304\,rad$)

$\sin(b)=-0{,}3$ donne $\begin{cases} b=\beta \\ ou\ \ b=\pi-\beta\end{cases}$ donc $S=\{-\beta;\pi-\beta\}$

Ex 77 :

1) On donne $\hat{A}=34°$; $a=4\,cm$; $\hat{B}=60°$

ainsi $\hat{C}=180°-34°-60°=86°$

d'après la formule des sinus : $\frac{\sin(60°)}{b}=\frac{\sin(34°)}{4}$

donc $b=4\times\frac{\sin(60°)}{\sin(34°)}\simeq 6{,}2\,cm$

2) On donne $\hat{A}=60{,}3°$; $a=5\,cm$; $b=5{,}75\,cm$; $c=3\,cm$

d'après la formule des sinus : $\frac{\sin(60{,}3°)}{5}=\frac{\sin(\hat{B})}{5{,}75}$ donc $\hat{B}\simeq 87{,}3°$

d'après la formule des sinus : $\frac{\sin(60{,}3°)}{5}=\frac{\sin(\hat{C})}{3}$ donc $\hat{C}\simeq 31{,}4°$