Ex 38 :

$f(x)=(x^2+2)\sqrt{x}$ avec $x>0$

$f'(x)=(2x)\sqrt{x}+(x^2+2)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{(2x)(\sqrt{x})(2\sqrt{x})+x^2+2}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2+2}{2\sqrt{x}}$

$f(x)=\frac{1}{2x^2+4}$ avec $x\in\mathbb{R}$ donc $f'(x)=\frac{-4x}{(2x^2+4)^2}$

$f(x)=\frac{4}{2x^3-x^2}$ avec $x>1$ donc $f'(x)=\frac{-4(6x^2-2x)}{(2x^3-x^2)^2}=\frac{(-8x)(3x+1)}{(2x^3-x^2)^2}$

$f(x)=\frac{4x-1}{3x^2+2x+1}$ avec $x\geqslant 0$

$f'(x)=\frac{4(3x^2+2x+1)-(4x-1)(6x+2)}{(3x^2+2x+1)^2}=\frac{12x^2+8x+4-24x^2-2x+2}{(3x^2+2x+1)^2}$

$=\frac{-12x^2+6x+6}{(3x^2+2x+1)^2}=\frac{-12(x+0,5)(x-1)}{(3x^2+2x+1)^2}$

Ex 39 :

$f(x)=2x^3\sqrt{x}$ avec $x>0$

$f'(x)=(3x^2)(\sqrt{x})+(2x^3)\times\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{(3x^2)(\sqrt{x})(\sqrt{x})+2x^3}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^3}{2\sqrt{x}}$

$f(x)=(x-1)(x^2+3x-1)$ avec $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=1\times(x^2+3x-1)+(x-1)(2x+3)=x^2+3x-1+2x^2+x-3$
$=3x^2+4x-4=(3x-2)(x+2)$

$f(x)=\frac{2x+3}{x-3}$ avec $x<3$

$f'(x)=\frac{2(x-3)-1(2x+3)}{(x-3)^2}=\frac{2x-6-2x-3}{(x-3)^2}=\frac{-9}{(x-3)^2}$

$f(x)=\frac{3x^2-1}{\sqrt{x}}$ avec $x>0$

$f'(x)=\frac{(6x)(\sqrt{x})-(3x^2-1)(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(\sqrt{x})^2}=\frac{(6x)(\sqrt{x})(2\sqrt{x})-(3x^2-1)}{(2x\sqrt{x})}$

$=\frac{12x^2-3x^2+1}{(2x\sqrt{x})}=\frac{9x^2+1}{(2x\sqrt{x})}$

Ex 40 :

$f(x)=(3x+1)^5$ avec $x\in\mathbb{R}$ donc $f'(x)=5\times3\times(3x+1)^4=15(3x+1)^4$

$f(x)=\sqrt{3x+1}$ avec $x>\frac{-1}{3}$ donc $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

$f(x)=-3(5-4x)^5$ avec $x\in\mathbb{R}$
$f'(x)=(-3)\times5\times(-4)\times(5-4x)^4=60(5-4x)^4$

$f(x)=\sqrt{4-2x}$ avec $x<2$ donc $f'(x)=\frac{-2}{2\sqrt{4-2x}}=\frac{-1}{\sqrt{4-2x}}$

Ex 41 :

$f(x)=(2x)(x+1)^{10}$ avec $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=2(x+1)^{10}+(2x)(10(x+1)^9)=(x+1)^9(2x+2+20x)=(22x+2)(x+1)^9$

$f(x)=(x+1)\sqrt{3x+1}$ avec $x>\frac{-1}{3}$

$f'(x)=\sqrt{3x+1}+(x+1)(\frac{3}{2\sqrt{3x+1}})=\frac{2(\sqrt{3x+1})^2+3(x+1)}{2\sqrt{3x+1}}=\frac{9x+5}{2\sqrt{3x+1}}$

$f(x)=\frac{\sqrt{6-2x}}{x}$ avec $0<x<3$

$f'(x)=\frac{(\frac{-2}{2\sqrt{6-2x}})x-\sqrt{6-2x}}{x^2}=\frac{(\frac{-x}{\sqrt{6-2x}})-\sqrt{6-2x}}{x^2}=\frac{-x-(\sqrt{6-2x})^2}{x^2}$

donc $f'(x)=\frac{-x-(6-2x)}{x^2}=\frac{x-6}{x^2}$

Ex 49 :

Conjectures :

- f est décroissante sur $]0\,;2]$ et croissante sur $[2\,;+\infty[$
- f admet un minimum local et global en $x=2$
- f n'admet aucun maximum (local ou global)

Preuves :

$f(x)=\dfrac{x^2+x+9}{x+1}$ avec $x>0$

$f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+9)}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^2+3x+1-x^2-x-9}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$ donne $(x-2)(x+4)=0$ avec $x\neq-1$ soit $x=2$ ou $x=-4$
or $x>0$ donc la seule racine possible est $x=2$

x	0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$+$		$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		2		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
f	9	↘	5	↗	$+\infty$

La conjecture est bien confirmée car $\forall x>0$: $f(x)\geqslant 5$

Ex 52 :

$f(x)=4x-1$ avec $x\in[-2\,;1]$

$f'(x)=4>0$ donc on obtient le tableau de variations suivant

x	-2		1
signe de f'		$+$	
f	-9	↗	3

$f(x)=x^2-4x+3$ avec $x\in[-4\,;-1]$

$f'(x)=2x-4=2(x-2)$ donc $f'(x)=0$ donne $x=2$ or $2\notin[-4\,;-1]$
donc f n'admet aucune racine ; on obtient le tableau de variations suivant

x	-4		-1
signe de f'		$-$	
f	35	↘	8

$f(x)=\dfrac{x^2-6x+1}{x-2}$ avec $x\in[3\,;9]$

$f'(x)=\dfrac{(2x-6)(x-2)-(x^2-6x+1)}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+11}{(x-2)^2}$

$f'(x)=0$ donne $x^2-4x+11=0$ on obtient $\Delta<0$ donc $f'(x)>0$
d'où le tableau de variations suivant

x	3		9
signe de f'		$+$	
f	-8	↗	4

$f(x)=x^3-48x$ avec $x\in[-7\,;9]$

$f'(x)=3x^2-48=3(x^2-16)=3(x-4)(x+4)$

$f'(x)=0$ donne $3(x-4)(x+4)=0$ donc $x=-4$ ou $x=4$
d'où le tableau de variations suivant

x	-7		-4		4		9
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-7	↗	128	↘	-128	↗	297

$f(x)=\dfrac{2}{(x+3)^2}$ avec $x\in[-8\,;-4]$; $f'(x)=\dfrac{-2(2)(x+3)}{(x+3)^4}=\dfrac{-4}{(x+3)^3}>0$

en effet, le signe de $(x+3)^3$ est le même que celui de $x+3$ car $(x+3)^3=(x+3)(x+3)^2$

donc f est strictement croissante sur $[-8\,;-4]$

Ex 55 :

Le coût total de production est donné par :

$C(x)=x^3-30x^2+400x+100$ avec $x\in[0;25]$

La recette est donnée par : $R(x)=247x$

Le bénéfice est donné par : $B(x)=R(x)-C(x)$

donc $B(x)=(247x)-(x^3-30x^2+400x+100)$

$=247x-x^3+30x^2-400x-100$

$=-x^3+30x^2-153x-100$

$B'(x)=-3x^2+60x-153=-3(x-3)(x-17)$

$B'(x)=0$ donne $(x-3)(x-17)=0$ donc $x=3$ ou $x=17$

on en déduit le tableau de variations de B :

x	0		3		17		25
signe de B'		+	0	−	0	+	
B	-100 ↘		-316	↗	1056	↘	-800

Ainsi l'entreprise réalise un bénéfice maximum pour une production de 17 pièces métalliques et ce bénéfice maximal vaut 1056 €

Ex 70 :

$f(x)=x^3+3x^2+1$ avec $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2+6x$ donc $f(-1)=3$ et $f'(-1)=-3$

L'équation de la tangente en $a=-1$ est $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

Soit $(T_{-1}): y=-3x$

par ailleurs $f(x)-(-3x)=x^3+3x^2+1+3x=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$

(identité remarquable connue ...)

Le signe de $(x+1)^3$ donne alors la postion relative de C_f et (T_{-1}) :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$(x+1)^3$	$-$	0	$+$
Position relative de C_f et (T_{-1})	C_f en dessous de (T_{-1})		C_f au dessus de (T_{-1})

Ex 73 :

$f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^2+1}$ avec $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x^2+1)-(2x)(x^2+x-1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x^3+x^2+2x+1-2x^3-2x^2+2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$

ainsi $f(-1)=-0{,}5$ et $f'(-1)=-1$

l'équation de la tangente à C_f en $a=-1$ est : $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

soit encore $(T_{-1}): y=-x-1{,}5$

par ailleurs on a :

$f(x)-(-x-1{,}5)=\dfrac{x^2+x-1}{x^2+1}-(-x-\dfrac{3}{2})=\dfrac{x^2+x-1-(-x-1{,}5)(x^2+1)}{x^2+1}$

$=\dfrac{x^2+x-1-(-x^3-1{,}5x^2-x-1{,}5)}{x^2+1}=\dfrac{x^3+2{,}5x^2+2x+0{,}5}{x^2+1}=\dfrac{2x^3+5x^2+4x+1}{2x^2+2}$

or $(x+1)^2(2x+1)=(x^2+2x+1)(2x+1)=2x^3+4x^2+2x+x^2+2x+1$

$=2x^3+5x^2+4x+1$

donc on déduit que $f(x)-(-x-1{,}5)=\dfrac{(x+1)^2(2x+1)}{2x^2+2}$

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	-0,5	$+\infty$
$(x+1)^2$	+		+
$2x+1$	−	0	+
$2x^2+2$	+		+
$f(x)-(-x-1{,}5)$	−	0	+
Position relative de C_f et (T_{-1})	C_f en dessous de (T_{-1})		C_f au dessus de (T_{-1})