**Ex 75 :**

$f(x)=ax^2+bx+c$ donc $f'(x)=2ax+b$

$C_f$ admet une tangente horizontale en $a=-3$ donc $f'(-3)=0$

donc $-6a+b=0$

La tangente à $C_f$ en $a=-1$ a pour équation $y=4x+5$

or cette équation est $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

donc $f'(-1)=4$ et $f'(-1)+f(-1)=5$ donc $f(-1)=1$

donc $-2a+b=4$ et $a-b+c=1$

Ainsi $a,b,c$ vérifient le sytème $\begin{cases}-6a+b=0\\-2a+b=4\\a-b+c=1\end{cases}$ donc $\begin{cases}-4a=-4\\-2a+b=4\\a-b+c=1\end{cases}$

donc $\begin{cases}a=1\\-2a+b=4\\a-b+c=1\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=1\\-2+b=4\\-b+c=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=1\\b=6\\c=6\end{cases}$

donc $f(x)=x^2+6x+6$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

**Ex 76 :**

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ avec $x\neq 1$ donc $f'(x)=a-\dfrac{c}{(x-1)^2}$

$A(3;2)\in C_f$ donc $f(3)=2$ donc $3a+b+\dfrac{c}{2}=2$

La tangente à $C_f$ en $A(3;2)$ est horizontale donc $f'(3)=0$

donc $a-\dfrac{c}{4}=0$

La tangente à $C_f$ en $a=2$ a pour équation $y=3x+2$ donc $f'(2)=3$

donc $a-c=3$

on obtient alors le système $\begin{cases}3a+b+\dfrac{c}{2}=2\\ a-\dfrac{c}{4}=0\\ a-c=3\end{cases}$ donc $\begin{cases}6a+2b+c=4\\c=4a\\c=a-3\end{cases}$

donc $\begin{cases}10a+2b=4\\a=-1\\c=-4\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=-1\\b=7\\c=-4\end{cases}$ donc $f(x)=-x+7-\dfrac{4}{x-1}$

**Ex 77 :**

$f(x)=2x\sqrt{x}-3x$ et $g(x)=\dfrac{1}{16}x^3$ avec $x>0$

Soit $M(x;y)\in C_f\cap C_g$ donc $y=f(x)=g(x)$

donc $2x\sqrt{x}-3x=\dfrac{1}{16}x^3$ donc $32x\sqrt{x}-48x=x^3$

donc $x^3-32x\sqrt{x}+48x=0$ donc $x(x^2-32\sqrt{x}+48)=0$

donc $x=0$ ou $x^2-32\sqrt{x}+48=0$ cependant $x>0$

donc la seule possibilité de valeur éventuelle est $x^2-32\sqrt{x}+48=0$

or $4^2-32\times\sqrt{4}+48=16-64+48=0$ donc $x=4$ convient !

Avec un logiciel formel on montre en effet que :

$x^3-32x\sqrt{x}+48x=0 \Leftrightarrow x(\sqrt{x}-2)^2(x+4\sqrt{x}+12)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $\sqrt{x}-2=0$ ou $x+4\sqrt{x}+12=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=4$

L'équation de la tangente $(d_1)$ à $C_f$ en $a=4$ est

$y=f'(4)(x-4)+f(4)$

or $f'(x)=2\sqrt{x}+(2x)(\dfrac{1}{2\sqrt{x}})-3=2\sqrt{x}+\sqrt{x}-3=3(\sqrt{x}-1)$

donc $f(4)=4$ et $f'(4)=3$ donc $(d_1): y=3x-8$

L'équation de la tangente $(d_2)$ à $C_g$ en $a=4$ est $y=g'(4)(x-4)+g(4)$

or $g'(x)=\dfrac{3}{16}x^2$ donc $g(4)=4$ et $g'(4)=3$ donc $(d_2): y=3x-8$

Par conséquent $(d_1)$ et $(d_2)$ correspondent bien à la même tangente !

**Ex 79 :**

$f(x)=\dfrac{x+1}{3x}$ et $g(x)=x^3+2$ avec $x\neq 0$

Soit $(T_1)$ la tangente à $C_f$ en $a=1$

Soit $(T'_1)$ la tangente à $C_g$ en $a=1$

<u>Conjectures :</u>

- $(T_1): y=\dfrac{-1}{3}x+1$
- $(T'_1): y=3x$
- $(T_1)\perp(T'_1)$

Preuves :

$f'(x)=\dfrac{3x-3(x+1)}{9x^2}=\dfrac{-3}{9x^2}=\dfrac{-1}{3x^2}$ et $g'(x)=3x^2$

donc $f(1)=\dfrac{2}{3}$, $f'(1)=\dfrac{-1}{3}$, $g(1)=3$, $g'(1)=3$

or $(T_1): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ donc $(T_1): y=\dfrac{-1}{3}x+1$

et $(T'_1): y=g'(1)(x-1)+g(1)$ donc $(T'_1): y=3x$

de plus le produit des coefficients-directeur de ces 2 tangentes est égal à $-1$
donc $(T_1)\perp(T'_1)$

**Ex 86 :**

Le coût total de production est $C(x)=\dfrac{-1}{3}x^3+22x^2+96x$ avec $x\in[0;30]$

La recette est $R(x)=480x$

Le bénéfice est $B(x)=R(x)-C(x)=(480x)-(\dfrac{-1}{3}x^3+22x^2+96x)$

donc $B(x)=\dfrac{1}{3}x^3-22x^2+384x$ avec $x\in[0;30]$

ainsi $B'(x)=x^2-44x+384=(x-12)(x-32)$

$B'(x)=0$ donne $(x-12)(x-32)=0$ donc $x=12$ ou $x=32$

or $32\notin[0;30]$ donc la seule racine est $x=12$

on obtient le tableau de variations de $B$ sur $[0;30]$

| $x$ | 0 | | 12 | | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $B'$ | | + | 0 | − | |
| $B$ | 0 | ↗ | 2016 | ↘ | 720 |

Donc l'entreprise réalise en bénéfice maximal pour une production de 12 000 unités et ce bénéfice maximal est $B_{max}=2\,016\,000\,€$

**Ex 89 :**

***Partie A*** : le volume du petit cube est $U(x)=(6-2x)^3$

donc $U(x)=6^3-3\times6^2\times(2x)+3\times6\times(2x)^2-(2x)^3$

donc $U(x)=-8x^3+72x^2-216x+216$ avec $x\in[0;3]$

le volume du pavé est $6\times6\times(8-(6-2x))=36(2x+2)=72x+72$

donc le volume du grand cube est $V(x)=U(x)+72x+72$

soit $V(x)=-8x^3+72x^2-144x+288$ avec $x\in[0;3]$

***Partie B*** : $f(x)=-x^3+9x^2-18x+36$ avec $x\in[0;3]$

$f'(x)=-3x^2+18x-18=-3(x^2-6x+6)$

$f'(x)=0$ donne $x^2-6x+6=0$ donc $\Delta=21>0$

donc $x_1=\dfrac{6-\sqrt{12}}{2}=3-\sqrt{3}$ , $x_2=3+\sqrt{3}$

or $3+\sqrt{3}\notin[0;3]$ donc la seule racine est $3-\sqrt{3}\simeq1{,}27$

on obtient le tableau de variations de $f$ sur $[0;3]$

| $x$ | 0 | | 1,27 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f'$ | | − | 0 | + | |
| $f$ | 36 | ↘ | 25,6 | ↗ | 36 |

Ainsi $f$ admet un minimum lorsque $x=3-\sqrt{3}$ et ce minimum vaut 25,6

***Partie C*** : on vérifie bien que $V(x)=8f(x)$ avec $x\in[0;3]$

ainsi le volume minimal du flacon est de $V_{min}=8\times25{,}6\simeq205\ cm^3$

**Ex 90** :

$f(x)=2x^3-x^2+x+1$ et $g(x)=x+2$ avec $x\in[-2;2]$

on note $d(x)=f(x)-g(x)=2x^3-x^2-1$ avec $x\in[-2;2]$

$d'(x)=6x^2-2x=(2x)(3x-1)$

alors $d'(x)=0$ donne $2x=0$ ou $3x-1=0$ donc $x=0$ ou $x=\dfrac{1}{3}$

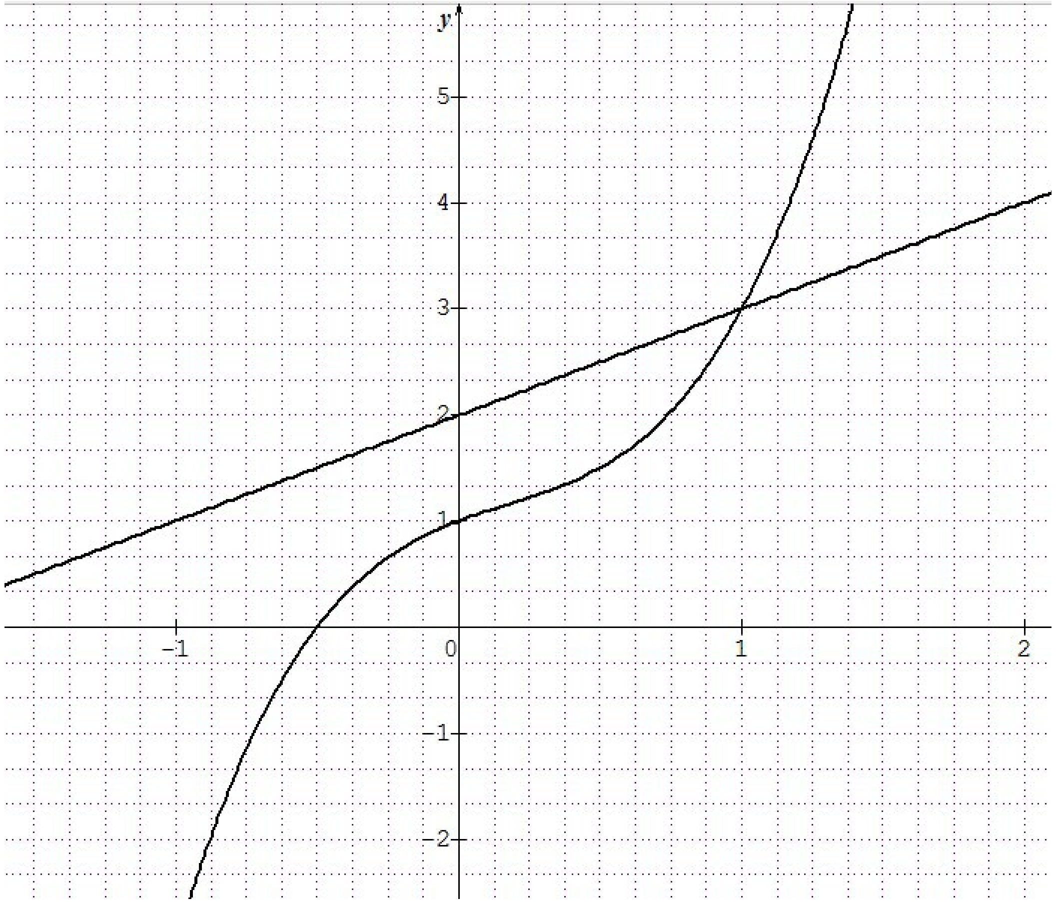
on obtient le tableau de variations de $d$ sur $[-2;2]$

| $x$ | -2 | | 0 | | 1/3 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f'$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f$ | -21 | ↗ | -1 | ↘ | -28/27 | ↗ | 11 |

Par ailleurs $d(1)=0$ donc on en déduit le tableau de signes de $d(x)$ :

| $x$ | -2 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $d(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| Position de $C_f$ et $C_g$ | | $C_f$ en dessous de $C_g$ | | $C_f$ au dessus de $C_g$ | |

On vérifie les résultats avec le graphique ci-dessous :




*Rque* : $d(x)=2x^3-x^2-1=(x-1)(2x^2+x+1)$
or $2x^2+x+1>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
donc $d(x)$ a le même signe que $x-1$

**Ex 92 :**

$f(x)=x^3+12$ et $g(x)=x^2+8x$ avec $x\in[-3;2]$
donc $f(x)-g(x)=x^3-x^2-8x+12$
or $(x+3)(x-2)^2=(x+3)(x^2-4x+4)=x^3-4x^2+4x+3x^2-12x+12$
donc $f(x)-g(x)=x^3-x^2-8x+12=(x+3)(x-2)^2$

on pose $d(x)=f(x)-g(x)$ ; on obtient le tableau de signes de $d(x)$

| $x$ | -3 | | 2 |
|---|---|---|---|
| $x+3$ | 0 | $+$ | |
| $(x-2)^2$ | | $+$ | 0 |
| $d(x)$ | 0 | $+$ | 0 |

Ainsi $C_f$ est au-dessus de $C_g$ sur l'intervalle $[-3;2]$

par ailleurs $d'(x)=3x^2-2x-8=(x-2)(3x+4)$

donc $d'(x)=0$ donne $(x-2)(3x+4)=0$ soit $x=2$ ou $x=\frac{-4}{3}$

on obtient le tableau de variations de $d$ sur $[-3;2]$

| $x$ | -3 | | -4/3 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $d'$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 |
| $d$ | 0 | ↗ | 500/27 | ↘ | 0 |

On déduit que $d$ possède un maximum local en $x=\frac{-4}{3}$

Ainsi la distance maximale entre les courbes $C_f$ et $C_g$ est $d_{max}=\frac{500}{27}$

**Ex 98 :**

***Partie A : étude d'une fonction auxilliaire***

$P(x)=2x^3-3x^2-1$ avec $x\in\mathbb{R}$ donc $P'(x)=6x^2-6x=(6x)(x-1)$
$P'(x)=0$ donne $(6x)(x-1)=0$ donc $x=0$ ou $x=1$
on obtient le tableau de variations de $P$ sur $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $P'$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $P$ | $-\infty$ | ↗ | -1 | ↘ | -2 | ↗ | $+\infty$ |

$P(1)=-2$ et $P(2)=3$ donc $P(1)<0<P(2)$
ainsi en étudiant le tableau de variations précédent on déduit qu'il existe un réel $\alpha\in]1;2[$ tel que $P(\alpha)=0$

<u>Rque</u> : En fait il s'agit d'un théorème connu sous le nom de *"théorème des valeurs intermédiaires"* que vous apprendrez ane <u>Terminale spé maths</u>

Lorsque l'on exécute le programme PYTHON on obtient $1{,}6<\alpha<1{,}7$

on modifie le programme PYTHON comme ci-contre :

- en testant ce programme avec $n=2$ on obtient $1{,}67<\alpha<1{,}68$
- en testant ce programme avec $n=3$ on obtient $1{,}677<\alpha<1{,}678$

```
ex98.py - f:/Users/Utilisateur/Desktop/ex98
File  Edit  Format  Run  Options  Window

def P(x):
    return 2*x**3-3*x**2-1

def encadrement(n):
    x=1
    while P(x)<0:
        x=x+10**(-n)
    return x-10**(-n),x
```

On en déduit le tableau de signes de $P(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

### *Partie B : étude d'une fonction rationnelle*

$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$ avec $x>-1$

donc $f'(x)=\dfrac{-(1+x^3)-(1-x)(3x^2)}{(1+x^3)^2}=\dfrac{-1-x^3-3x+3x^2}{(x^3+1)^2}=\dfrac{2x^2-3x-1}{(x^3+1)^2}$

ainsi on vérifie que $f'(x)=\dfrac{P(x)}{(x^3+1)^2}$ pour tout $x>-1$

d'après la ***Partie A*** on déduit le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | -1 | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f'$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | 0 |

### *Partie C : positions relatives de courbes*

l'équation de la tangente $(T)$ à $C_f$ en $a=0$ est $y=f'(0)(x-0)+f(0)$
on obtient $(T): y=-x+1$

on pose $d(x)=f(x)-(-x+1)=\dfrac{1-x}{1+x^3}+x-1=\dfrac{1-x+(x-1)(1+x^3)}{x^3+1}$

donc $d(x)=\dfrac{(x-1)(-1+1+x^3)}{x^3+1}=\dfrac{x^3(x-1)}{x^3+1}$

on obtient le tableau de signes de $d(x)$ :

| $x$ | -1 | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^3$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x^3+1$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| d(x) | \|\| | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Ainsi on déduit que :

- $C_f$ est au-dessus de $(T)$ si $-1<x<0$ ou $x>1$
- $C_f$ est en-dessous de $(T)$ si $0<x<1$
- $C_f$ rencontre $(T)$ en $x=0$ et $x=1$

**Ex 100 :**

$h(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^2+1}$ avec $x\in[-10;10]$

$h'(x)=\dfrac{(2x+1)(x^2+1)-(2x)(x^2+x-1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x^3+x^2+2x+1-2x^3-2x^2+2x}{(x^2+1)^2}$

donc $h'(x)=\dfrac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$ pour $x\in[-10;10]$

$h'(x)=0$ donne $-x^2+4x+1=0$ donc $x_1=2-\sqrt{5}$ ou $x_2=2+\sqrt{5}$
on en déduit le tableau de varaitions de $h$ sur $[-10;10]$

| $x$ | -10 | | $x_1$ | | $x_2$ | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f'$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f$ | 0,88 | $\searrow$ | -1,12 | $\nearrow$ | 1,12 | $\searrow$ | 1,08 |

On en déduit que pour tout $x\in[-10;10]$ : $h(2-\sqrt{5})\leqslant h(x)\leqslant h(2+\sqrt{5})$

donc $\forall x\in[-10;10]$ : $\dfrac{-\sqrt{5}}{2}\leqslant h(x)\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (on dit que $h$ est bornée sur [-10;10])