Ex 77 :

Volume : $V(x)=hx^2$ avec $x\in[0;5]$ et h fixé

Surface : $S(x)=2x^2+4hx$

Avec $V(x)=1$ on obtient $hx^2=1$ donc $h=\frac{1}{x^2}$

ainsi $S(x)=2x^2+(4h)(\frac{1}{x^2})=2x^2+\frac{4}{x}$

Avec la calculatrice on conjecture le tableau de variations suivant :

x	0		1		5
S	||	↘	6	↗	50,8

Ainsi S admet un minimum en $x=1$,la surface minimale est de $S_{min}=6\,dm^2$

$$S(x)-S(1)=(2x^2+\frac{4}{x})-6=\frac{2x^3-6x+4}{x}$$

or $2(x-1)^2(x+2)=(2x^2-4x+2)(x+2)$

$=2x^3-4x^2+2x+4x^2-8x+4=2x^3-6x+4$

donc $S(x)-S(1)=\frac{2(x-1)^2(x+2)}{x}$

on obtient le tableau de signes suivant :

x	0		1		5
$(x-1)^2$		+	0	+	
$x+2$		+		+	
x	0	+		+	
$S(x)-S(1)$	||	+	0	+	

Ainsi pour tout $x\in[0;5]$: $S(x)-S(1)\geqslant 0$

donc pour tout $x\in[0;5]$: $S(x)\geqslant S(1)$

donc la fonction S admet un minimum global en $x=1$

Ex 80 :

$(x-1)(x-4)=x^2-5x+4$

$A(3;2)$ et $B(7;-2)$; lea droite (AB) a pour équation $y=mx+p$

$m=\frac{-2-2}{7-3}=-1$ et $p=2-(-1)\times3=5$ donc $(AB): y=-x+5$

on cherche alors l'intersection entre $g(x)=-x+5$ et $f(x)=\frac{4}{x}$

donc $\frac{4}{x}=5-x$ donc $4=x(5-x)$ donc $4=5x-x^2$ donc $x^2-5x+4=0$

donc $(x-1)(x-4)=0$ donc $x=1$ ou $x=4$

les points d'intersection entre C_f et C_g sont donc $C(1;4)$ et $D(4;1)$

Ex 81 :

Soit $f(x)=\frac{ax+b}{2x-3}$ avec $x\neq1{,}5$

On lit graphiquement $A(-3;0), B(0;-2)\in C_f$

donc $f(-3)=0$ et $f(0)=-2$ donc $\frac{-3a+b}{-9}=0$ et $\frac{b}{-3}=-2$

donc $b=3a$ et $b=6$ donc $a=2$ donc $f(x)=\frac{2x+6}{2x-3}$

Equation $f(x)=4$ donc $\frac{2x+6}{2x-3}=4$ donc $2x+6=8x-12$

donc $-6x=-18$ donc $x=3$ donc $S=\{3\}$ et $C(3;4)\in C_f$

Equation $f(x)=1$ donc $\frac{2x+6}{2x-3}=1$ donc $2x+6=2x-3$

donc $6=-3$ c'est impossible ! donc $S=\emptyset$ et on vérifie cela sur le graphique puisque la droite $(d): y=1$ est une asymptote horizontale à C_f

Ex 82 :

1) $\sqrt{x^2}=9$ donc $\sqrt{x^2}=3^2$ donc $x=3$ ou $x=-3$ donc FAUX

2) $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{5}$ donc $x^2+1=5$ donc $x^2=4$ donc $x=2$ ou $x=-2$ donc FAUX

3) $\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}=\sqrt{x}$ donc $\frac{x}{x^2+1}=x$ donc $x=x(x^2+1)$ donc $x^3+x=x$
donc $x^3+x-x=0$ donc $x^3=0$ donc $x=0$ donc VRAI

Equation $\dfrac{x+1}{x-3}=2$ donc $x+1=2x-6$ donc $x=7$ donc $S=\{7\}$

Inéquation $\dfrac{x+1}{x}\geqslant 2$ donc $\dfrac{x+1}{x}-2\geqslant 0$ donc $\dfrac{x+1-2x}{x}\geqslant 0$

donc $\dfrac{-x+1}{x}\geqslant 0$; on dresse alors le tableau de signes

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-x+1$		+		+	0	−	
x		−	0	+		+	
$\dfrac{-x+1}{x}$		−	$\Vert$	+	0	−	

Donc $S=]0;1]$

Inéquation $\dfrac{x+1}{x}<0$; on dresse alors le tableau de signes

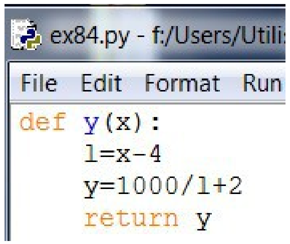
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		−	0	+		+	
x		−		−	0	+	
$\dfrac{x+1}{x}$		+	0	−	$\Vert$	+	

Donc $S=]-1;0[$

Ex 84 :
Les dimensions du rectangle vert sont strictement positives
donc $x=2+2+L$ et $y=1+1+l$ donc $x>4$ et $y>2$
on cherche la valeur de x telle que $A(x)=1000\,m^2$ (rectangle vert)

donc $(x-4)(y-2)=1000$ donc $y-2=\dfrac{1000}{x-4}$ donc $y=\dfrac{1000}{x-4}+2$

ainsi l'alogorithme en PYTHON contient une erreur...
le programme PYTHON (corrigé) est donc le suivant :




```
def y(x):
    l=x-4
    y=1000/l+2
    return y
```

Le programme PYTHON donnant l'aire du terrain est

```
def A(x):
    return (x-4)*(y(x)-2)
```

$m(100)$ reourne la valeur
$(999.9999999999998, 70.60000000000026)$
ainsi $x=70{,}6\,m$ et $Aire=1000\,m^2$ et on déduit $y=17{,}015\,m$

Ex 86 :
Coût total de fabrication : $C(x)=x+40$ avec $x\in[0;100]$
Recette : $R(x)=5x$

Pour 2 kg de bonbons on obtient $C(2)=42$; $R(2)=10$

Pour 50 kg de bonbons on obtient $C(50)=90$; $R(50)=250$

Bénéfice : $B(x)=R(x)-C(x)=4x-40$

ce bénéfice est positif si $B(x)\geqslant 0$ donc $4x-40\geqslant 0$ donc $x\geqslant 10$
ainsi à partir de 10 kg de bonbons l'entreprise réalise un bénéfice

le bénéfice moyen est $B_m(x)=\dfrac{B(x)}{x}=\dfrac{4x-40}{x}=4-\dfrac{40}{x}$
pour une production de 15 kg on obtient $B_m(15)=1{,}33\,€/kg$

si $B_m(x)\geqslant 3$ alors $4-\dfrac{40}{x}\geqslant 3$ donc $1-\dfrac{40}{x}\geqslant 0$ donc $x\geqslant 40$
il faudra donc produire au moins 40 kg de bonbons

Ex 85 :

soit $f(x)=x^2$ et $g(x)=\sqrt{x}$

on cherche $f(x)=g(x)$ donc $x^2=\sqrt{x}$ donc $x^2-\sqrt{x}=0$

donc $(\sqrt{x})(x\sqrt{x}-1)=0$ donc $\sqrt{x}=0$ ou $x\sqrt{x}=1$ donc $x=0$ ou $x=1$

Ex 94 :

Volume du cône : $V=60\,cm^3$ et $V=\dfrac{\pi R^2 h}{3}$ donc $\dfrac{\pi R^2 h}{3}=60$

donc $\pi R^2 h=180$ donc $h=\dfrac{180}{\pi R^2}$

on cherche $h\leqslant 18$ donc $\dfrac{180}{\pi R^2}\leqslant 18$ donc $18\pi R^2\geqslant 180$ ($R>0$)

donc $R\geqslant\sqrt{\dfrac{10}{\pi}}$

Ex 95 :

Inéquation $\dfrac{2x+1}{4-x}>1$ donc $\dfrac{2x+1}{4-x}-1>0$ donc $\dfrac{2x+1-4+x}{4-x}>0$

donc $\dfrac{3x-3}{4-x}>0$ donc $\dfrac{x-1}{4-x}>0$

on dresse alors le tableau de signes

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x+1}{x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Donc $S=]1\,;4[$

Inéquation $\dfrac{1}{2x-4}\leqslant 1$ donc $\dfrac{1}{2x-4}-1\leqslant 0$ donc $\dfrac{1-2x+4}{2x-4}\leqslant 0$

donc $\dfrac{-2x+3}{2x-4}\leqslant 0$; on dresse alors le tableau de signes

x	$-\infty$		$1{,}5$		2		$+\infty$
$-2x+3$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-2\text{x}+3}{2x-4}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Donc $S=]-\infty\,;1{,}5]\cup]2\,;+\infty[$

Inéquation $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-2}\leqslant 0$ donc $\dfrac{x-2-x}{x(x-2)}\leqslant 0$ donc $\dfrac{-2}{x(x-2)}\leqslant 0$

donc $\dfrac{2}{x(x-2)}\geqslant 0$; on dresse alors le tableau de signes

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2}{x(x-2)}$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

Donc $S=]-\infty\,;0[\cup]2\,;+\infty[$