Ex 18 :

On note Z la variable aléatoire telle que $Z(\Omega)=\{10;20;30;40\}$

On sait que $P(Z=10)=0{,}2$; $P(Z=30)=0{,}2$; $P(Z=20)=0{,}5\,P(Z=40)$

Or $\sum_{k\in\Omega} P(Z=k)=1$ donc $P(Z=10)+P(Z=20)+P(Z=30)+P(Z=40)=1$

donc $0{,}2+0{,}2+0{,}5\,P(Z=40)+P(Z=40)=1$

donc $1{,}5\,P(Z=40)=0{,}6$ donc $P(Z=40)=0{,}4$ d'où $P(Z=20)=0{,}2$

On déduit alors la loi de Z par le tableau ci-contre :

k	10	20	30	40	TOTAL
$P(Z=k)$	0,2	0,2	0,2	0,4	1

Ex 19 :

Les données sont traduites dans le tableau ci-dessous :

nombre	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
somme	6	7	8	9	10	2	3	4	5	6	7

Ainsi on obtient les valeurs possibles de S :

$S(\Omega)=\{2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

On déduit alors la loi de S par le tableau ci-contre :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
$P(S=k)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	1

Ex 21 :

Expérience aléatoire :

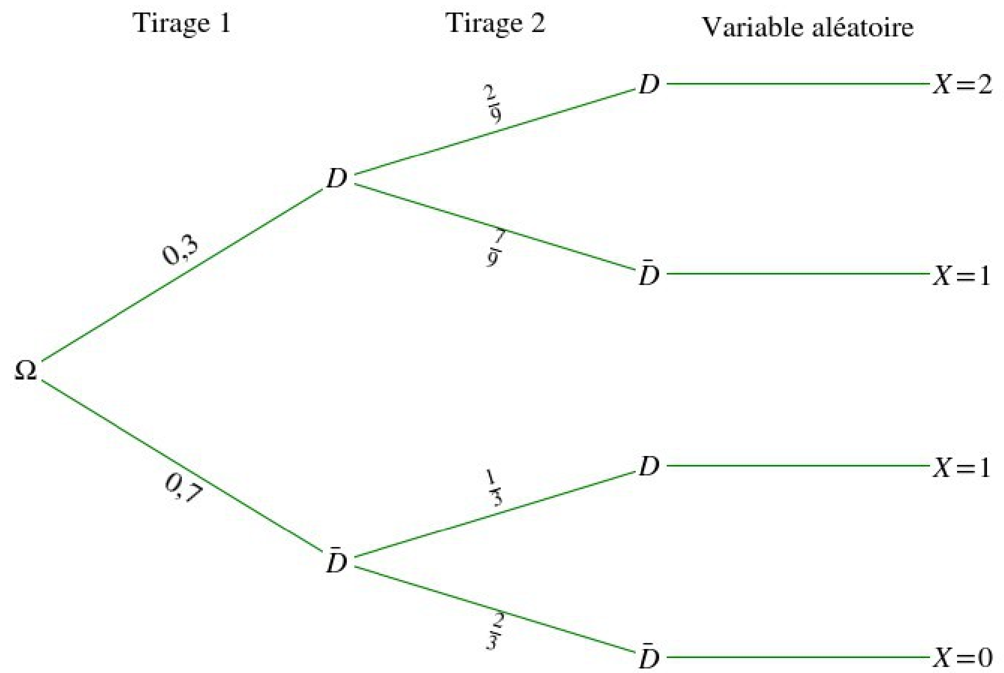
- on dispose de 11 jetons numérotés de 1 à 11
- on tire au hasard un jeton de l'urne
- si on obtient le n°2 alors on gagne 3 €
- si on obtient le n°4 alors on perd 5 €
- sinon on perd 10 €

```python
from random import randint

def gain():
    tirage=randint(1,11)
    if tirage==2:
        G=3
    elif tirage==4:
        G=-5
    else:
        G=-10
    return(G)
```

Ex 23 :

on obtient l'arbre pondéré de la situation :



Ainsi on obtient les valeurs de la variable X : $X(\Omega)=\{0;1;2\}$

$P(X=0)=0{,}7\times\frac{2}{3}=\frac{7}{15}$; $P(X=1)=0{,}3\times\frac{7}{9}+0{,}7\times\frac{1}{3}=\frac{7}{15}$

$P(X=2)=0{,}3\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$; on en déduit la loi de probabilité de X

k	0	1	2	TOTAL
$P(X=k)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

la probabilité que parmi les 2 pièces il y en ait au moins une défectueuse est :

$P(X\geqslant 1)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{8}{15}$

l'espérance de la variable X est donnée par :

$$E(X)=\sum_{k\in\Omega} k\times P(X=k)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=0,6$$

la variance de la variable X est donnée par :

$$V(X)=\sum_{k\in\Omega} k^2\times P(X=k)-(E(X))^2=0^2\times\frac{7}{15}+1^2\times\frac{7}{15}+2^2\times\frac{1}{15}-0,36=\frac{28}{75}$$

l'écart-type de la variable X est donnée par :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{28}{75}}\simeq 0,611$$

Ex 24 :

On donne la loi de probabilité suivante :

z_i	0	2	4
$P(Z=z_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{5}{32}$

l'espérance de la variable Z est donnée par :

$$E(Z)=\sum_{z_i\in\Omega} z_i\times P(Z=z_i)=0\times\frac{21}{32}+2\times\frac{6}{32}+4\times\frac{5}{32}=1$$

la variance de la variable X est donnée par :

$$V(Z)=\sum_{z_i\in\Omega} z_i^2\times P(Z=z_i)-(E(Z))^2=0^2\times\frac{21}{32}+2^2\times\frac{6}{32}+4^2\times\frac{5}{32}-1=2,25$$

l'écart-type de la variable X est donnée par :

$$\sigma(Z)=\sqrt{V(Z)}=\sqrt{2,25}=1,5$$

Ex 25 :

les valeurs de la variable X sont : $X(\Omega)=\{-3€\,;+1€\,;+7€\}$

la loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

k	-3	$+1$	$+7$	TOTAL
$P(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

l'espérance de la variable X est donnée par :

$$E(X)=\sum_{k\in\Omega} k\times P(X=k)=(-3)\times\frac{1}{2}+1\times\frac{5}{12}+7\times\frac{1}{12}=-0,5$$

la variance de la variable X est donnée par :

$$V(X)=\sum_{k\in\Omega} k^2\times P(X=k)-(E(X))^2$$

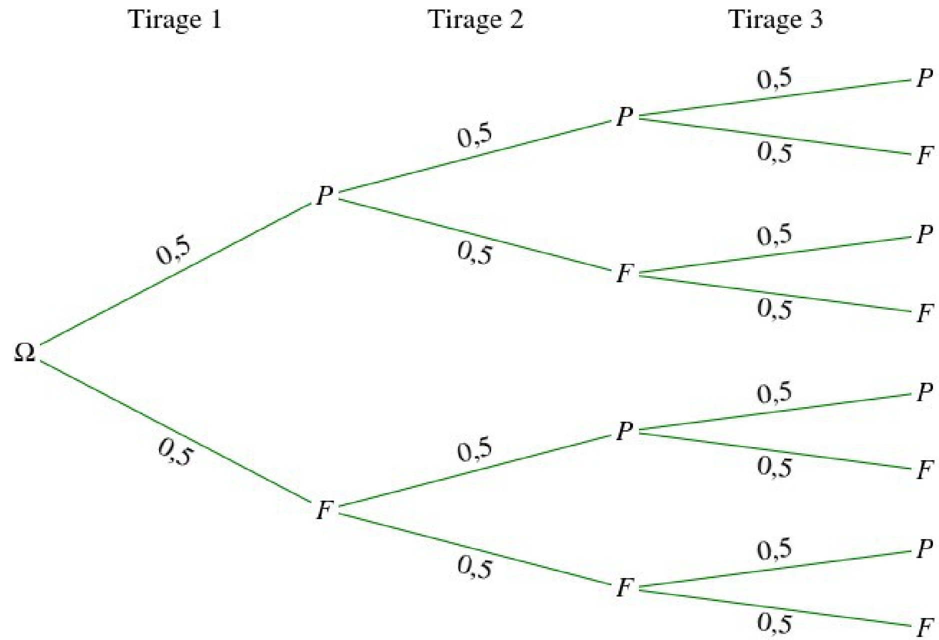
$$V(X)=(-3)^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{5}{12}+7^2\times\frac{1}{12}-(-0,5)^2=8,75$$

l'écart-type de la variable X est donnée par :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{8,75}\simeq 2,958$$

Ex 27 :

On obtient l'arbre pondéré ci-dessous :



Probabilité que le 3ème lancer donne "Face" :

$$p=P(PPF)+P(PFF)+P(FPF)+P(FFF)=4\times 0,5^3=0,5$$

les valeurs de la variable X sont : $X(\Omega)=\{30\,;40\,;50\,;60\}$

la loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

k	30	40	50	60	TOTAL
$P(X=k)$	0,125	0,375	0,375	0,125	1

l'espérance de la variable X est donnée par :

$$E(X)=30\times 0,125+40\times 0,375+50\times 0,375+60\times 0,125=45$$

la variance de la variable X est donnée par :
$V(X)=30^2\times 0{,}125+40^2\times 0{,}375+50^2\times 0{,}375+60^2\times 0{,}125-45^2=75$

l'écart-type de la variable X est donnée par :
$\sigma(X)=\sqrt{75}\simeq 8{,}66$

Interprétation : En moyenne, en jouant un grand nombre de parties on espère gagner 45 pts $\pm$ 8,66 pts

Ex 28 :
les valeurs de la variable X sont : $X(\Omega)=\{-2\,;+10\}$
$P(X=+10)=P(ppp)+P(fff)=(0{,}5)^3+(0{,}5)^3=0{,}25$
$P(X=-2)=1-P(X=+10)=0{,}75$

la loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

k	-2	$+10$	TOTAL
$P(X=k)$	0,75	0,25	1

l'espérance de la variable X est donnée par :
$E(X)=(-2)\times 0{,}75+10\times 0{,}25=1$

la variance de la variable X est donnée par :
$V(X)=(-2)^2\times 0{,}75+10^2\times 0{,}25-1^2=27$

l'écart-type de la variable X est donnée par :
$\sigma(X)=\sqrt{27}\simeq 5{,}2$

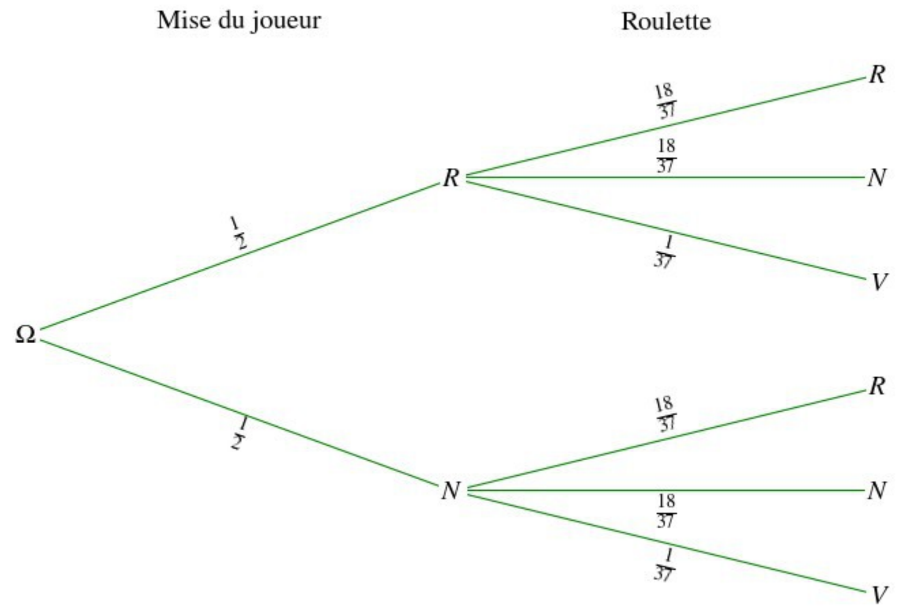
Interprétation : En moyenne, en jouant un grand nombre de parties on espère gagner 1 € $\pm$ 5,20 € (le risque est donc assez modéré)

Ex 33 :
les valeurs de la variable X sont : $X(\Omega)=\{-1\,;+1\}$

la loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-contre :

k	-1	$+1$	TOTAL
$P(X=k)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$	1

En effet, on a l'arbre pondéré suivant :



$$P(X=+1)=P(RR)+P(NN)=\frac{1}{2}\times\frac{18}{37}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{37}=\frac{18}{37} \quad \text{et} \quad P(X=-1)=\frac{19}{37}$$

l'espérance de la variable X est donnée par :
$E(X)=(-1)\times\frac{19}{37}+1\times\frac{18}{37}=\frac{-1}{37}$

la variance de la variable X est donnée par :
$V(X)=(-1)^2\times\frac{19}{37}+1^2\times\frac{18}{37}-\left(\frac{-1}{37}\right)^2=\frac{1368}{1369}$

l'écart-type de la variable X est donnée par :
$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1368}{1369}}\simeq 0{,}999$

Interprétation : En moyenne, en jouant un grand nombre de parties au Casino on espère "gagner" -0,027 € $\pm$ 1 € (le risque est donc assez élevé !)

Ex 34 :

X suit la loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0;1]$

les valeurs de la variable X sont : $X(\Omega)=\{0;1\}$

on a : $P(X=0)=1-p$ (on obtient FACE) et $P(X=1)=p$ (on obtient PILE)

alors $E(X)=0\times(1-p)+1\times p=\dfrac{1}{3}$ donc $p=\dfrac{1}{3}$

ainsi $P(X=0)=\dfrac{2}{3}$ et $P(X=1)=\dfrac{1}{3}$

Ex 35 :

les valeurs de la variable G sont : $G(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

Il s'agit d'une Loi Binomiale de paramètres $n=3$ et $p=0,5$

donc la loi de G est donnée par :

k	0	1	2	3	TOTAL
$P(X=k)$	0,125	0,375	0,375	0,125	1

l'espérance de la variable G est donnée par : $E(G)=n\,p=1,5$

Interprétation : En moyenne, en interrogeant un grand nombre de personnes, on espère obtenir 1,5 sondages effectifs

Ex 36 :

les valeurs de la variable X sont :

$X(\Omega)=\{-1€;1,5€;2,5€;4€;4,5€;5€;6€;7€;10€\}$

la loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

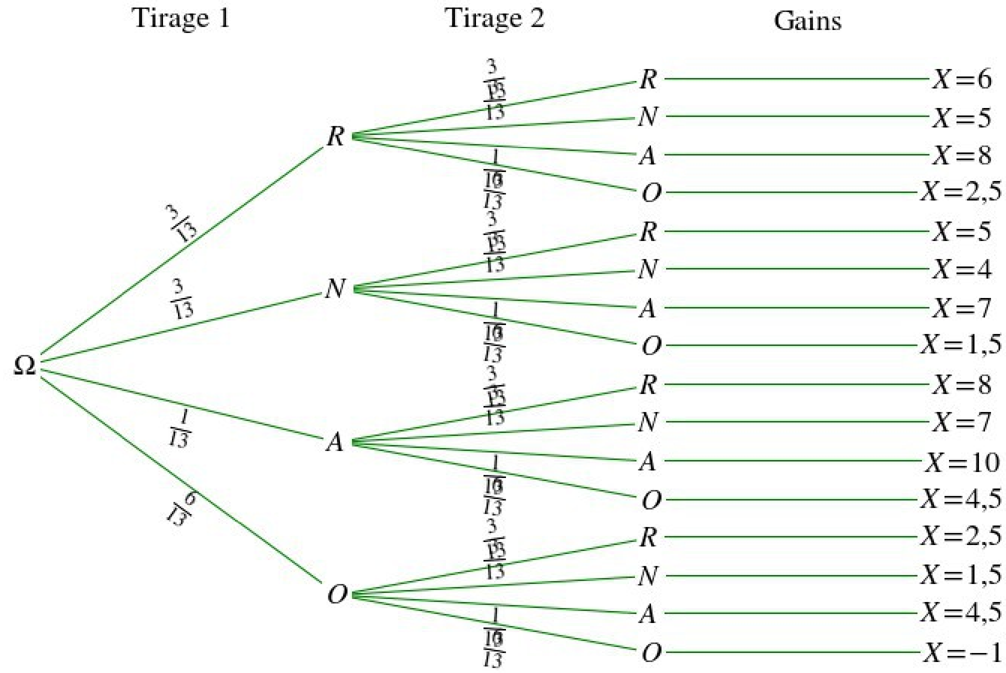
k	-1	1,5	2,5	4	4,5	5	6	7	8	10	TOTAL
$P(X=k)$	$\frac{36}{169}$	$\frac{36}{169}$	$\frac{36}{169}$	$\frac{9}{169}$	$\frac{12}{169}$	$\frac{18}{169}$	$\frac{9}{169}$	$\frac{6}{169}$	$\frac{6}{169}$	$\frac{1}{169}$	1

l'espérance de la variable X est donnée par :

$$E(X)=(-1)\times\frac{36}{169}+1,5\times\frac{36}{169}+...+10\times\frac{1}{169}=\frac{442}{169}=\frac{34}{13}\simeq 2,615$$

Interprétation : En moyenne, en jouant un grand nombre de parties, on espère gagner 2,615 €

On obtient l'arbre pondéré ci-dessous :



Ex 37 :

On sait que $X(\Omega)=\{-1;+2\}$ avec $P(X=-2)=p$ et $P(X=+1)=1-p$

le jeu est équitable si $E(X)=0$

or $E(X)=(-2)\times p+1\times(1-p)=1-3\,p$ on en déduit que $1-3\,p=0$

donc $p=\dfrac{1}{3}$ et $P(X=-2)=\dfrac{1}{3}$; $P(X=+1)=\dfrac{2}{3}$

Ex 39 :

On donne le tableau ci-contre

	Jeu 1		**Jeu 2**	
Gain	−2	5	−1	3
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

L'espérance du Jeu 1 est

$E(X)=(-2)\times 0,5+5\times 0,5=1,5$

L'espérance du Jeu 2 est $E(Y)=(-1)\times 0,375+3\times 0,525=1,5$

$E(X)=E(Y)$

on ne peut pas départager les 2 jeux uniquement avec leur moyenne !

donc il faut étudier les écarts-type

on a $V(X)=4\times 0{,}5+25\times 0{,}5-1{,}5^2=12{,}25$ donc $\sigma(X)=\sqrt{12{,}25}=3{,}5$
de même $V(Y)=1\times 0{,}375+9\times 0{,}525-1{,}5^2=3{,}75$

donc $\sigma(Y)=\sqrt{3{,}75}\simeq 1{,}94$
ainsi $\sigma(Y)<\sigma(X)$
donc le meilleur jeu est le <u>Jeu n° 2</u>

Ex 40 :
On obtient le tableau croisé suivant donnant les coordonnées des points entre le **dé rouge** et le **dé bleu**

pts	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$	$(1;6)$
2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$	$(2;5)$	$(2;6)$
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$	$(3;4)$	$(3;5)$	$(3;6)$
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$	$(4;4)$	$(4;5)$	$(4;6)$
5	$(5;1)$	$(5;2)$	$(5;3)$	$(5;4)$	$(5;5)$	$(5;6)$
6	$(6;1)$	$(6;2)$	$(6;3)$	$(6;4)$	$(6;5)$	$(6;6)$

- Si on obtient $(1;2)$ ou $(2;4)$ ou $(3;6)$ on gagne $5\,€$
- Si on obtient $(1;3)$ ou $(2;6)$ on gagne $10\,€$
- Sinon on ne gagne rien

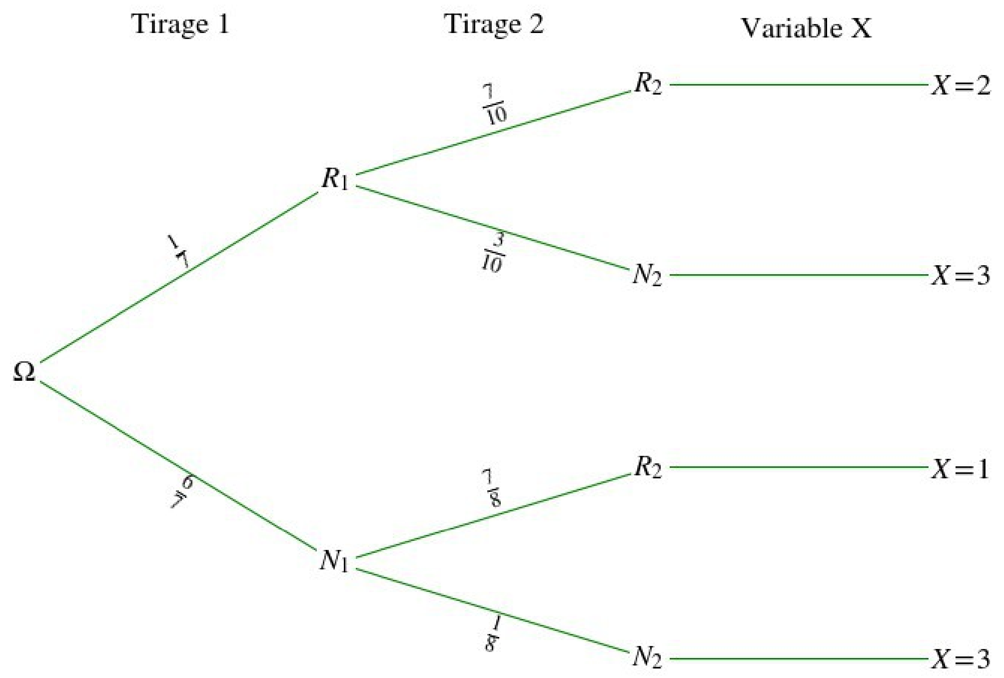
la loi de X est donnée par :

k	0	+5	+10	TOTAL
$P(X=k)$	$\frac{31}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	1

L'espérance de la variable aléatoire X est :
$$E(X)=0\times\frac{31}{36}+5\times\frac{1}{18}+10\times\frac{1}{12}=\frac{10}{9}$$

soit un gain moyen environ de $1{,}11\,€$

Ex 41 :
Les valeurs manquantes de l'arbre sont données ci-dessous :



En effet $P(N_1)=1-P(R_1)=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$

de même $P_{R_1}(N_2)=1-P_{R_1}(R_2)=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$

par ailleurs $P(X=3)=\frac{3}{20}$ donc $\frac{1}{7}\times\frac{3}{10}+\frac{6}{7}\times P_{N_1}(N_2)=\frac{3}{20}$

donc on obtient $P_{N_1}(N_2)=\frac{1}{8}$

Ex 42 :
Après exécution de l'algorithme on obtient :
$L=\{4;3;4;2;1\}$

cet algorithme correspond à 5 lancers successifs d'un dé tétraédrique

$k \leftarrow 0$
$L \leftarrow$ *liste vide*
Tant que $k<5$
    $k \leftarrow k+1$
    ajouter à L l'élément (nombre entier aléatoire entre 1 et 4 + nombre entier aléatoire entre 1 et 4)

On pourra traduire cet algorithme en langage PYTHON :

```
ex42.py - f:/Users/Utilisateur/Desktop/ex4
File  Edit  Format  Run  Options  Windo
from math import *
from random import randint

k=0
L=[]
while k<5:
    k=k+1
    x=randint(1,4)
    L.append(x)
print (L)
```

```
[1, 4, 3, 1, 3]
>>>
=============== RESTART: f:/Us
[1, 1, 4, 3, 1]
>>>
=============== RESTART: f:/Us
[2, 1, 4, 2, 2]
>>>
=============== RESTART: f:/Us
[2, 4, 3, 4, 3]
>>>
=============== RESTART: f:/Us
[2, 4, 1, 2, 4]
```

Ex 45 :

on a $X(\Omega)=\{-2\,;-1\,;0\,;10\}$ et on sait que $\sum_{k\in\Omega} P(X=k)=1$

donc $P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=10)=1$

donc $3P(X=0)+0{,}5P(X=0)+P(X=0)+3P(X=0)=1$

donc $7{,}5P(X=0)=1$ donc $P(X=0)=\frac{2}{15}$

on en déduit la loi de probabilité de X :

k	-2	-1	0	$+10$	TOTAL
$P(X=k)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$	1

Ex 44 :

somme	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

on obtient : $S(\Omega)=\{2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\}$

l'espérance de S est donc :

$$E(S)=2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{1}{18}+4\times\frac{1}{12}+5\times\frac{1}{9}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{1}{6}+....$$

$$+...8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{1}{9}+10\times\frac{1}{12}+11\times\frac{1}{18}+12\times\frac{1}{36} \quad \text{soit} \quad E(S)=7$$

Interprétation : En moyenne, en jouant un grand nombre de parties on espère obtenir 7 pts (ce qui parait logique puisque 7 est la valeur "centrale")

Ex 46 :

Soit R la variable aléatoire comptant le nombre de faces peintes

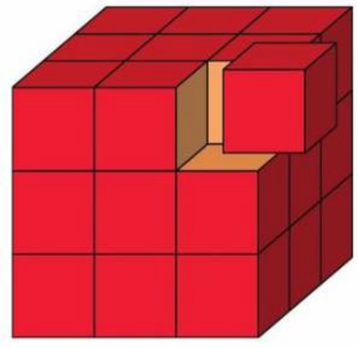
alors $R(\Omega)=\{0\,;1\,;2\,;3\}$

$P(R=0)=\frac{1}{27}$ (le centre du cube)

$P(R=1)=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$ (les cubes centraux)

$P(R=2)=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$ (les cubes médians)

$P(R=3)=\frac{8}{27}$ (les coins du cube)



Ex 48 :

On obtient le *script* écrit en langage PYTHON ci-dessous :

```
*ex48.py - f:\Users\Utilisateur\Desktop\ex48.py (3.6.1)*
File  Edit  Format  Run  Options  Window  Help
from math import *

E=0
for k in range(1,101):
    E=E+k/5050

print ("Le nombre de valeurs est : "+str(k))
print("L'espérance est : "+str(E))
```

après exécution on obtient :

```
=============== RESTART: f:\Users\Utilisateur\Des
Le nombre de valeurs est : 100
L'espérance est : 1.0000000000000007
>>>
```