Ex 49 :

on considère le *script* en langage PYTHON (version améliorée) :

```
>>> gain()
tirage= 3
X= -20
[0, 0, 1]
>>> gain()
tirage= 4
X= -3
[0, 1, 1]
>>> gain()
tirage= 4
X= -3
[0, 2, 1]
>>> gain()
tirage= 4
X= -3
[0, 3, 1]
>>> gain()
tirage= 6
X= -20
[0, 3, 2]
>>> gain()
tirage= 3
X= -20
[0, 3, 3]
>>> gain()
```

```
>>> gain()
tirage= 4
X= -3
[0, 4, 3]
>>> gain()
tirage= 6
X= -20
[0, 4, 4]
>>> gain()
tirage= 6
X= -20
[0, 4, 5]
>>> gain()
tirage= 4
X= -3
[0, 5, 5]
>>> gain()
tirage= 6
X= -20
[0, 5, 6]
>>> gain()
tirage= 3
X= -20
[0, 5, 7]
>>> gain()
```

*ex49.py - f:\Users\Utilisateur\Desktop\Lycée

File Edit Format Run Options Window

```python
from random import random

N=[0,0,0]

def gain():
    tirage=int(random()*6+1)
    if tirage<=2:
        X=5
        N[0]=N[0]+1
    elif tirage==4:
        X=-3
        N[1]=N[1]+1
    else:
        X=-20
        N[2]=N[2]+1
    print("tirage=",tirage)
    print("X=",X)
    print(N)
```

Expérience aléatoire :

- On lance plusieurs fois un dé à 6 faces (non truqué)
- Si on obtient un n° inférieur ou égal à 2 alors on gagne 5€
- Si on obtient le n° 4 alors on perd 3€
- Sinon on perd 20€

De plus, ce *script* montre les valeurs cumulées des différents cas obtenus

Ex 51 :

on obtient $X(\Omega)=\{1;2;3;4;5;6\}$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{k=6} k.P(X=k)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+...+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=3{,}5$$

on obtient $G(\Omega)=\{0;+6€;+12€\}$

La loi de probabilité de G est donnée ci-dessous :

k	0	+6	+12	TOTAL
$P(G=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

L'espérance de la variable G est :

$E(G)=0\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{3}+12\times\frac{1}{6}=4$ soit un gain moyen de 4€

on modifie la variable G en variable G' avec $G'(\Omega)=\{0;+27€\}$

La loi de probabilité de G est donnée ci-dessous :

k	0	+27	TOTAL
$P(G'=k)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

L'espérance de la variable G' est :

$E(G')=0\times\frac{5}{6}+27\times\frac{1}{6}=4{,}5$ soit un gain moyen de 4,50€

Ainsi le <u>jeu n°2</u> est préférable au jeu n°1

Ex 52 :

on écrit l'algorithme en langage PYTHON :

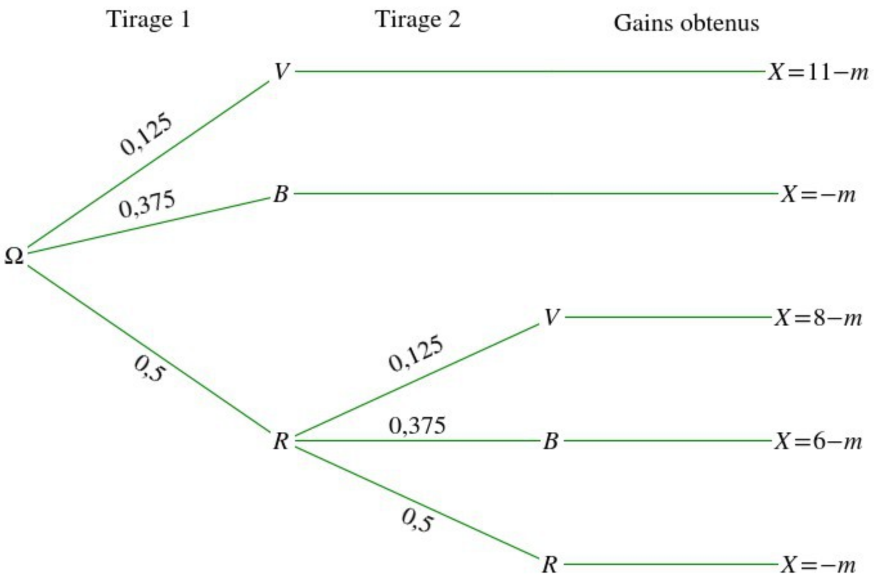
ex52.py - f:/Users/Utilisateur/Desktop/Lycée 2019/Classe Virtuelle/1

File Edit Format Run Options Window Help

```python
from math import *
from random import randint

gain=-10
for i in range(1,51):
    T=randint(1,6)
    if T>2:
        gain=gain+3
    else:
        gain=gain-2
print("le Gain obtenu est : "+str(gain))
```

Ex 53 : on obtient l'arbre pondéré de la situation :



soit m la mise de ce jeu ; l'espérance de la variable X est :

$$E(X)=(11-m)\times\frac{1}{8}+(-m)\times\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)+(8-m)\times\frac{1}{16}+(6-m)\times\frac{3}{16}$$

soit encore
$E(X)=-m+3$

avec un gain moyen de
$-2\,€$

il faut donc une mise de
$m=5\,€$

(C'est ce procéde de calcul qui est utilisé dans la plupart des jeux créés par la *Française des jeux*)

Le *script* écrit en langage PYTHON est donné ci-contre

ex53.py - f:\Users\Utilisateur\Desktop\Lycée 2019\Class...

File Edit Format Run Options Window Help

```
from math import *
from random import randint

mise=2
x=randint(1,8)
if x==1:
    gain=11-mise
if x%2==0:
    gain=-mise
if (x==3) or (x==5) or (x==7):
    y=randint(1,8)
    if y==1:
        gain=8-mise
    if y%2==0:
        gain=6-mise
    if (y==3) or (y==5) or (y==7):
        gain=-mise

print("vous avez gagné : "+str(gain))
```

Ex 54 :
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de billes de Marion
Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre de billes d'Emma

La loi de probabilité de Marion est :

k	$-x$	$+y$	TOTAL
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

La loi de probabilité d'Emma est :

k	$+x$	$-y$	TOTAL
$P(Y=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Le jeu est équitable pour Marion si $E(X)=0$
donc $\frac{-x}{4}+\frac{3y}{4}=1$ donc $x=3y$

Le jeu est équitable pour Emma si $E(Y)=0$
donc $\frac{x}{4}-\frac{3y}{4}=1$ donc $x=3y$
Ainsi les 2 conditions d'équité du jeu sont identiques pour Marion & Emma

Ex 55 :
on obtient $X(\Omega)=\{1\,;2\,;3\,;\ldots\,;100\}$
pour chaque valeur $k\in[1\,;100]$: $P(X=k)=0{,}01$
ainsi $E(X)=\frac{1+100}{2}\times100\times0{,}01=50{,}5$
on a $P(X=43)=0{,}01$; $P(X\leqslant20)=20\times0{,}01=0{,}2$

$P(X>61)=39\times0{,}01=0{,}39$; $P(30\leqslant X<40)=10\times0{,}01=0{,}1$

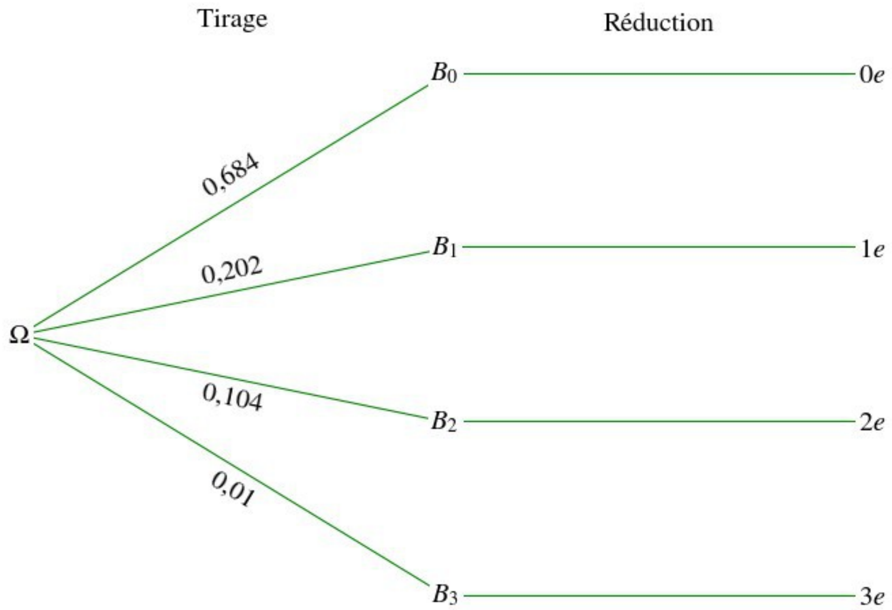
$P(X\in[45\,;67])=23\times0{,}01=0{,}23$;

$$P_{X\leqslant60}(X>35)=\frac{P(35<X\leqslant60)}{P(X\leqslant60)}=\frac{0{,}25}{0{,}60}=\frac{5}{12}$$

$P((X<50)\cup(X>80))=0{,}49+0{,}19=0{,}68$

Ex 56 :
Le modèle le plus adapté est un arbre pondéré
En effet, l'énoncé n'indique pas s'il est possible d'avoir plusieurs bons de réduction ; aussi en supposant 1 seul bon de réduction par paquet on obtient l'univers siuvant : $X(\Omega)=\{0\,;1\,;2\,;3\}$

on obtient l'arbre pondéré ci-dessous :



algorithme écrit en langage PYTHON :

ex56.py - f:/Users/Utilisateur/Desktop/Lycée 2019/Classe ...

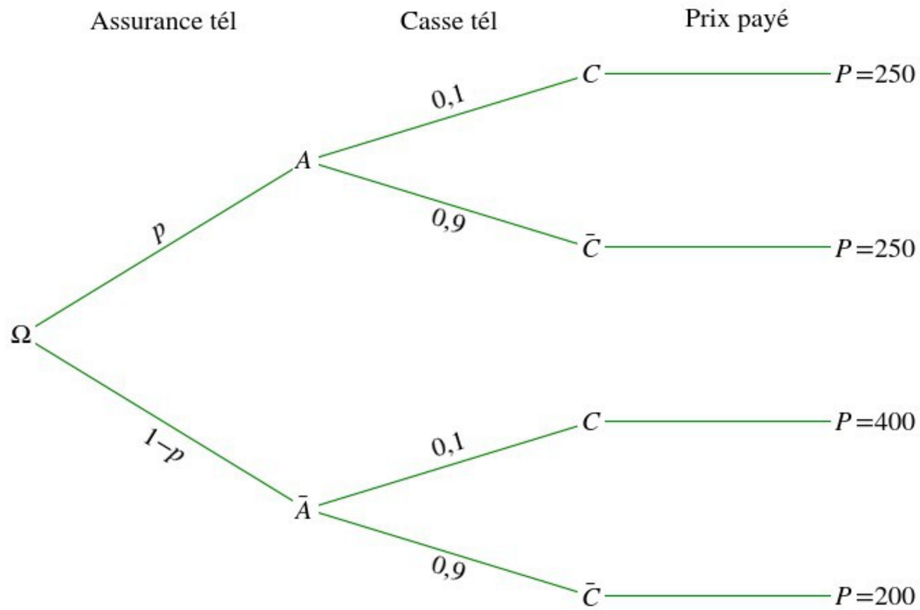
File Edit Format Run Options Window Help

```python
from math import *
from random import randint

reduc=0
x=randint(1,500)
if (0<x<6):
    reduc=3
if (5<x<58):
    reduc=2
if (57<x<159):
    reduc=1
if (x>158):
    reduc=0
print("vous avez une réduction de : "+str(reduc))
```

ainsi $E(X)=0\times0{,}684+1\times0{,}202+2\times0{,}104+3\times0{,}01=0{,}44\,€$
on espère donc obtenir une réduction moyenne de 0,44 € sur 500 paquets
(à ce prix là autant manger des brioches !...)

Ex 57 :
Soit X le montant total dépensé (assurance comprise) pour ce téléphone
on note p la probabilité que Maëlle choisisse une assurance complémentaire
on obtient l'arbre pondéré ci-dessous :

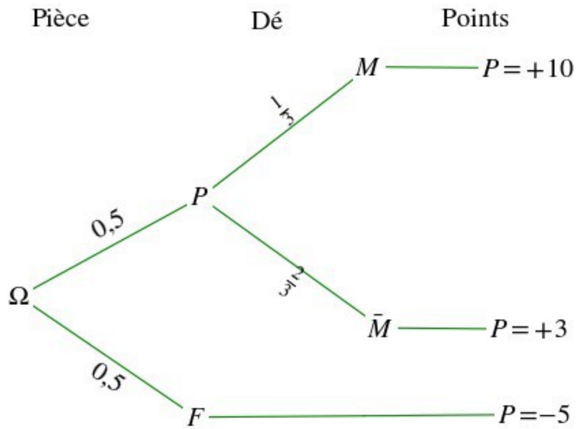


Le prix de revient moyen de ce téléphone est :
$E(X)=p\times0{,}1\times250+p\times0{,}9\times250+(1-p)\times0{,}1\times400+(1-p)\times0{,}9\times200$
$E(X)=250\,p+220-220\,p=220+30\,p$
Alors en supposant que $p=0{,}5$ on obtient un prix de revient moyen de 235 €
(on peut donc conseiller la prudence en acceptant cette assurance)

Ex 58 :
on obtient l'arbre pondéré ci-contre

M : "on obtient un multiple de 3 avec le dé"

$\overline{M}$: "on n'obtient pas de multiple de 3 avec le dé"



l'événement $(X=-5)$ signifie que l'on a obtenu $FACE$
La loi de probabilité est donnée par :

k	-5	$+3$	$+10$	TOTAL
$P(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

l'espérance de X est donnée par :

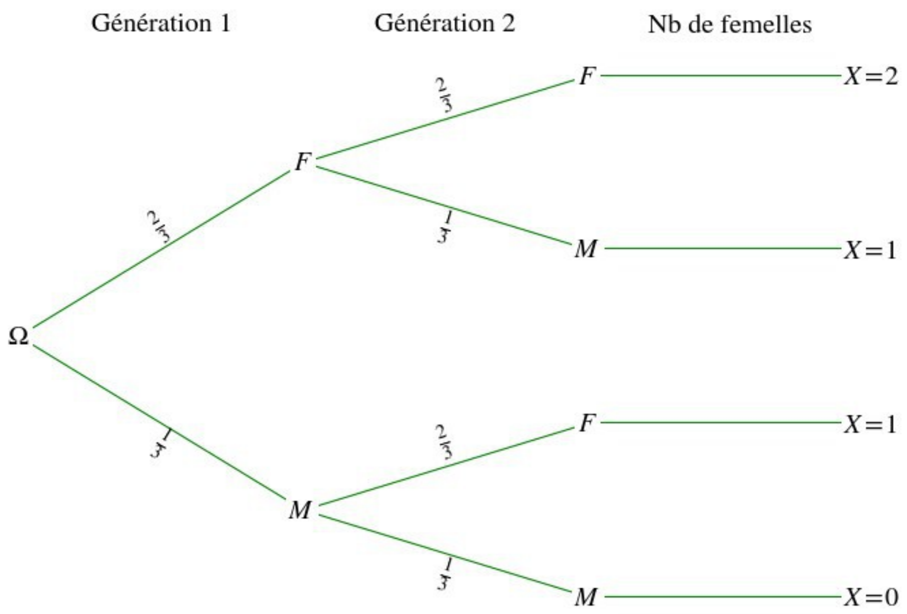
$$E(X)=(-5)\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}+10\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

la variance de X est donnée par :

$$V(X)=(-5)^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{3}+10^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1157}{36}$$

l'écart-type de X est donc $\sigma(X)=\sqrt{\frac{1157}{36}}\simeq 5{,}67$

Ex 59 :
Dans cette population il y a $2n$ femelles et n mâles ; on obtient donc l'arbre pondéré de la situation :

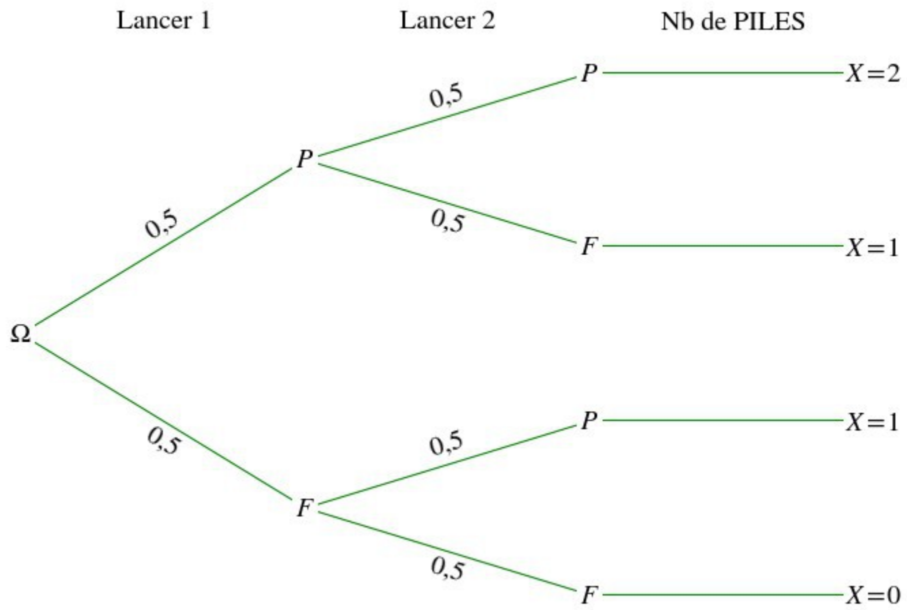


La variable X suit alors la loi Binomiale de paramètres $n=2$ et $p=\frac{2}{3}$
on obtient la loi de probabilité suivante :

k	0	1	2	TOTAL
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

Ainsi les événements les plus probables sont $(X=1)$ et $(X=2)$

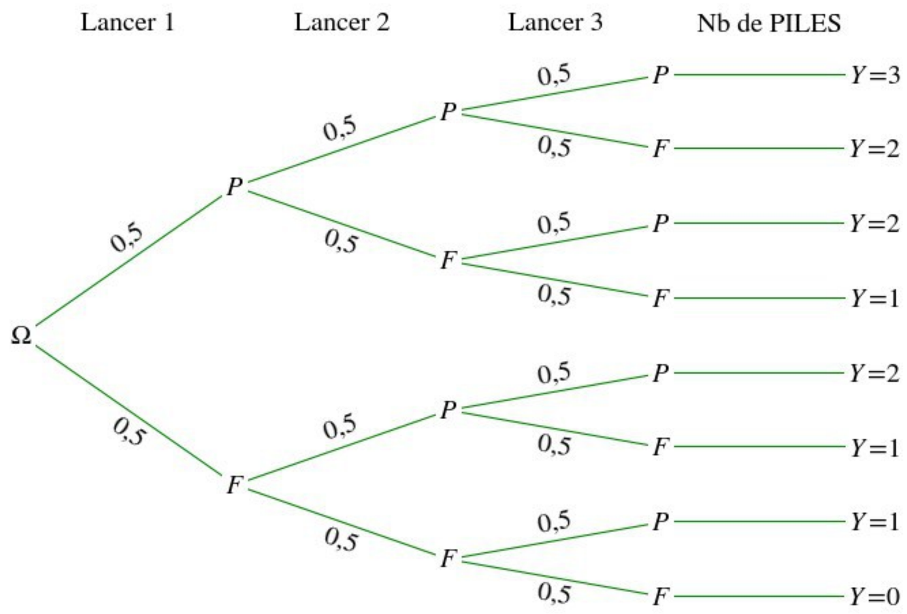
Ex 61 :
L'arbre de la situation de Gaëlle est :



On note X le nombre de PILES obtenus par Gaëlle
On note Y le nombre de PILES obtenus par Célia

l'objectif du problème est de déterminer si $X=Y$ ou $X<Y$ ou $X>Y$

L'arbre de la situation de Célia est :



On effectue une disjonction de cas :

<u>1er cas :</u> $X=Y$

- $P(X=0)=0{,}25$ et $P(Y=0)=0{,}125$
  donc $P((X=0)\cap(Y=0))=P(X=0)\times P(Y=0)=0{,}03125$
  car X et Y sont indépendants

- $P(X=1)=0{,}5$ et $P(Y=1)=0{,}375$
  donc $P((X=1)\cap(Y=1))=P(X=1)\times P(Y=1)=0{,}1875$

- $P(X=2)=0{,}25$ et $P(Y=2)=0{,}375$
  donc $P((X=2)\cap(Y=2))=P(X=2)\times P(Y=2)=0{,}09375$

- ainsi Gaëlle gagne 1€ avec une probabilité de 0,3125

<u>2eme cas :</u> $X<Y$

- $P(X=0)=0{,}25$ et $P(Y=1)=0{,}375$
  donc $P((X=0)\cap(Y=1))=P(X=0)\times P(Y=1)=0{,}09375$

- $P(X=0)=0{,}25$ et $P(Y=2)=0{,}375$
  donc $P((X=0)\cap(Y=2))=P(X=0)\times P(Y=2)=0{,}09375$

- $P(X=0)=0{,}25$ et $P(Y=3)=0{,}125$
  donc $P((X=0)\cap(Y=3))=P(X=0)\times P(Y=3)=0{,}03125$

- $P(X=1)=0{,}5$ et $P(Y=2)=0{,}375$
  donc $P((X=1)\cap(Y=2))=P(X=1)\times P(Y=2)=0{,}1875$

- $P(X=1)=0{,}5$ et $P(Y=3)=0{,}125$
  donc $P((X=1)\cap(Y=3))=P(X=1)\times P(Y=3)=0{,}0625$

- $P(X=2)=0{,}25$ et $P(Y=3)=0{,}125$
  donc $P((X=2)\cap(Y=3))=P(X=2)\times P(Y=3)=0{,}03125$

- ainsi Gaëlle perd 5€ avec une probabilité de 0,5

<u>3eme cas :</u> $X>Y$

- on déduit que Gaëlle gagne 10€ avec une probabilité de 0,1875

Enfin on calcule l'espérance de gain de Gaëlle :
$E(X)=(-5)\times 0{,}5+1\times 0{,}3125+10\times 0{,}1875=-0{,}3125<0$

Ainsi le jeu est <u>défavorable pour Gaëlle</u> et donc <u>favorable pour Célia</u>
(on pouvait bien sûr s'y attendre !...)

Ex 62 :
On se base sur un nombre n assez grand de lancers (2 pts ou à 3pts)
Soit X la variable comptant le nb de paniers à 2 pts
Soit Y la variable comptant le nb de paniers à 3 pts

alors $X \rightarrow B(n\,;0{,}7)$ et $Y \rightarrow B(n\,;0{,}4)$ (Lois Binomiales)

ainsi $E(X)=0{,}7n\times 2=1{,}4n$ et $E(Y)=0{,}4n\times 3=1{,}2n$
donc $E(X)>E(Y)$ ainsi Florane devra <u>privilégier les paniers à 2 pts</u>

(En tant que joueur de Basket-ball au niveau régional en Normandie dans les années 1980 – 1995 je peux vous confirmer la véracité de cette probabilité sur le terrain !)