Ex 57 :

1) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}1{,}4\\-0{,}2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AH}$

donc ces 2 vecteurs sont colinéaires, donc A, C, H sont alignés

donc $H\in(AC)$

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}1{,}4\\-0{,}2\end{pmatrix}$ donc $AH=\sqrt{1{,}4^2+(-0{,}2)^2}=\sqrt{2}$

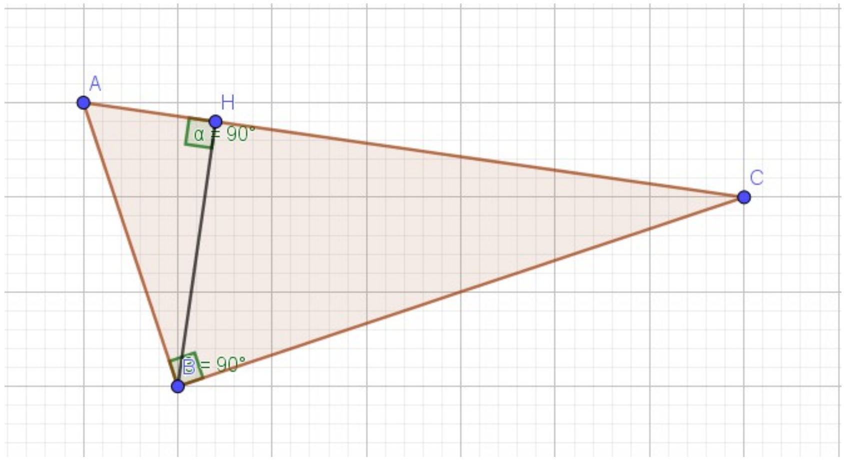
$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}0{,}4\\2{,}8\end{pmatrix}$ donc $BH=\sqrt{0{,}4^2+2{,}8^2}=2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ donc $AB=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

ainsi $AH^2+BH^2=AB^2$ donc ABH est rectangle en H

donc $(BH)\perp(AC)$

2) ainsi la distance de B à (AC) est $HB=2\sqrt{2}$



Ex 61 :

Le milieu de $[TU]$ est $K(\frac{1}{4},\frac{9}{10})$

ainsi $\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix}-0{,}7\\-0{,}7\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}0{,}15\\0{,}15\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MN}=\frac{-15}{7}\overrightarrow{MK}$

donc ces 2 vecteurs sont colinéaires

donc M, K, N sont alignés

donc $K\in(MN)$

de plus $MK=\sqrt{(-0{,}7)^2+(-0{,}7)^2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

et $\overrightarrow{KU}\begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$ donc

$KU=\sqrt{(-0{,}5)^2+(0{,}5)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

et $\overrightarrow{MU}\begin{pmatrix}-1{,}2\\-0{,}2\end{pmatrix}$ donc

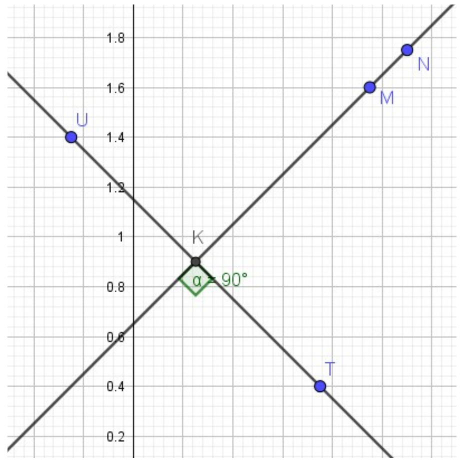
$MU=\sqrt{(-1{,}2)^2+(-0{,}2)^2}=\frac{\sqrt{37}}{5}$

or $MK^2+KU^2=(\frac{7\sqrt{2}}{10})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=1{,}48$

et $MU^2=(\frac{\sqrt{37}}{5})^2=1{,}48$

donc $MK^2+KU^2=MU^2$

donc MKU est rectangle en K ainsi (MN) est la médiatrice de $[UT]$



Ex 62 :

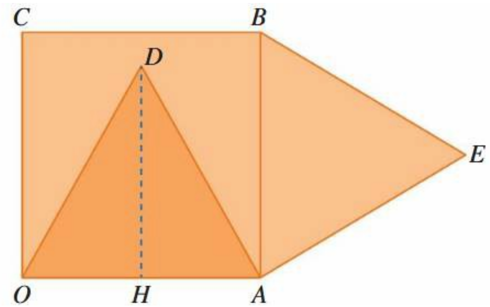
dans le repère $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$

on a $O(0;0)$, $A(1;0)$, $C(0;1)$, $B(1;1)$ de plus :

$DH^2=DO^2-OH^2=1^2-(0{,}5)^2=\frac{3}{4}$

donc $DH=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $D(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$

de même on obtient $E(1+\frac{\sqrt{3}}{2};0{,}5)$



ainsi $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0{,}5\\\frac{\sqrt{3}}{2}-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}+1\\-0{,}5\end{pmatrix}$

alors le déterminant de ces 2 vecteurs est

$$det(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE})=\begin{vmatrix}0{,}5 & \frac{\sqrt{3}}{2}+1\\\frac{\sqrt{3}}{2}-1 & -0{,}5\end{vmatrix}=\frac{-1}{4}-((\frac{\sqrt{3}}{2})^2-1^2)=\frac{-1}{4}-\frac{3}{4}+1=0$$

donc $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires donc C, D, E sont alignés

Ex 63 :

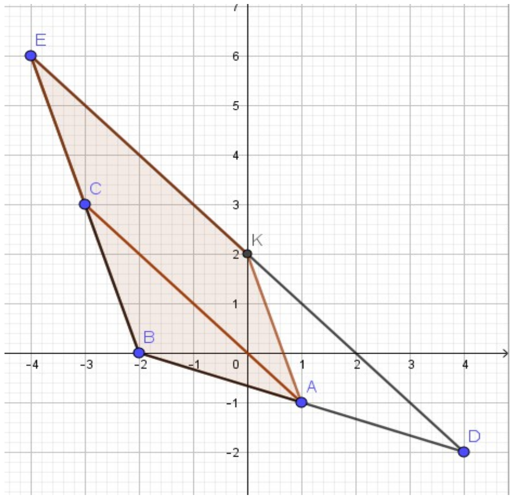
1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$
donc $AB=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$, $DB=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$,
$AD=\sqrt{7^2+1^2}=5\sqrt{2}$ donc $AB^2+DB^2=AD^2$
donc BDA est rectangle en B
d'après le théorème du cercle circonscrit on déduit que B appartient au cercle de diamètre $[AD]$

2) d'après l'énoncé $ABDE$ est un rectangle donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$ donc en posant $E(x\,;y)$ on obtient $9-x=1\,,4-y=-2$ donc $E(8\,;6)$

3) d'après l'énoncé $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DF}$ or $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$ donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DF}$
donc $ABFD$ est un parallélogramme

Ex 65 :

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$
donc $AB^2=9+1=10$
$AC^2=16+16=32$
$BC^2=1+9=10$
donc $AB=BC=\sqrt{10}$ donc
ABC est isocèle en B



2) voir figure ci-contre

3) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$
donc $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CE}$ donc $B\,,C\,,E$ sont alignés

4) $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{ED}=-2\,\overrightarrow{AC}$ donc ces 2 vecteurs sont colinéaires donc les droites (AC) et (ED) sont parallèles

5) on lit $K(0\,;2)$ donc $\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KE}=\overrightarrow{AC}$
donc $ACEK$ est un parallélogramme

Ex 67 :

Soit r le rayon du cercle de centre A passant par B et D
on a : $AB^2+BC^2=AC^2$ donc $r^2+21^2=(r+9)^2$
donc $r^2+441=r^2+18r+81$ donc $18r=360$ donc $r=20$

Ex 78 :

1) $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}+3\,\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{DC}+2\,\overrightarrow{AD}$

2) $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$
donc $\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CN}=2\,\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$
donc $\overrightarrow{CN}=-2\,\overrightarrow{CM}$ donc les vecteurs sont colinéaires
donc $C\,,M\,,N$ sont alignés

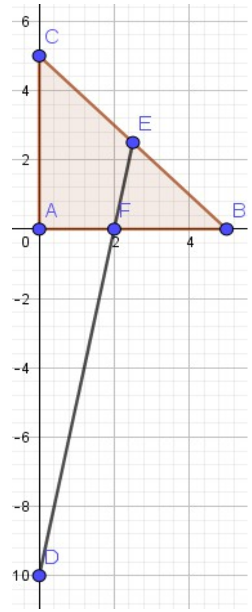
Ex 79 :

on se place dans le repère $(A\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC})$;
on effectue un agrandissement de rapport 5

donc $A(0\,;0)$, $B(5\,;0)$, $C(0\,;5)$, $F(2\,;0)$,
$D(0\,;-10)$, $E(2{,}5\,;2{,}5)$

ainsi $\overrightarrow{FE}\begin{pmatrix}0{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$
donc $\overrightarrow{DF}=2\,\overrightarrow{FE}$
donc ces 2 vecteurs sont colinéaires

donc $D\,,E\,,F$ sont alignés



Ex 80 :

<u>conjecture</u> : $P\,,Q\,,A$ sont alignés

<u>preuve</u> : $\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AQ}=1{,}5\,\overrightarrow{CA}+1{,}5\,\overrightarrow{CB}=-1{,}5\,\overrightarrow{AC}+1{,}5(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=-3\,\overrightarrow{AC}+1{,}5\,\overrightarrow{AB}$
donc $\overrightarrow{AQ}=-1{,}5\,\overrightarrow{AP}$
donc ces 2 vecteurs sont colinéaires
donc $P\,,Q\,,A$ sont alignés