Equations trigonométriques

I) Equations de la forme cos x = cos a

a est un nombre réel donné.

• Si a est différent de 0 + $k\pi$ alors :

L'ensemble des solutions de l'équation cos x = cos a est :

$\boldsymbol{S = \{a + 2k\pi\,;\, -a + 2k'\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})\,;\,(k' \in \mathbb{Z})\}}$

• Si a = 0 (2π) alors : cos x = 1 a pour ensemble de solutions :

S = $\{2k\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})\}$

• Si a = π (2π) alors : cos x = -1 a pour ensemble de solutions :

S = $\{\pi + 2k\pi\ ;\ (k \in \mathbb{Z})\}$

Exemples : Résoudre les équations :

a) $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{2}$

d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

e) $\cos x = 2$

Solutions:

a) $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

S = $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,;\, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ comme $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ on obtient alors :

$\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

S = $\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\,;\, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{2}$ a pour solutions :

$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

S = $\left\{\boldsymbol{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \,;\, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi}\right\} \quad \boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$

d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ Comme $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ on obtient :

$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{3\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

S = $\left\{\boldsymbol{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \,;\, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right\} \quad \boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$

e) $\cos x = 2$

Comme $-1 \leq \cos x \leq 1$ alors $\cos x = 2$ n'a aucune solution.

Il n'existe pas de réels a tel que $\cos a = 2$

L'ensemble des solutions est : **S =** $\emptyset$

II) Equations de la forme sin x = sin a

a est un nombre réel donné.

- **Si a est différent de** $\frac{\pi}{2}$ (2π) **ou de** $-\frac{\pi}{2}$ (2π) **alors :**

L'ensemble des solutions de l'équation sin x = sin a est :

$S = \{a + 2k\pi \,;\, \pi - a + 2k'\pi \;;\; (k \in \mathbb{Z});\, (k' \in \mathbb{Z})\}$

- **Si a =** $\frac{\pi}{2}$ (2π) **alors : sin x = 1 a pour ensemble de solutions :**

S = $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; (k \in \mathbb{Z}) \right\}$

- **Si a =** $-\frac{\pi}{2}$ (2π) **alors : sin x = -1 a pour ensemble de solutions :**

S = $\left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; (k \in \mathbb{Z}) \right\}$

Exemples : Résoudre les équations :

a) $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$

b) $\sin x = \frac{1}{2}$

c) $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$

d) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\sin x = -3$

Solutions:

a) $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

S = $\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;;\; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin x = \frac{1}{2}$ comme $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ on obtient alors :

$\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\mathbf{S} = \left\{ \boldsymbol{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \; ; \; \frac{5\pi}{6} + 2\,k\pi} \right\} \qquad \boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$

c) $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$ a pour solutions :

$2x = \frac{\pi}{6} + 2\,k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$ ou $2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\,k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$ ou $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$

$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$

$\mathbf{S} = \left\{ \boldsymbol{\frac{\pi}{12} + k\pi \; ; \; \frac{5\pi}{12} + k\pi} \right\} \qquad \boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$

d) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ comme $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ on obtient alors :

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3}$

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2\,k\pi$ ou $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\,k\pi$

$x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\,k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\,k\pi$

$x = \frac{\pi}{12} + 2\,k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{12} + 2\,k\pi$

$\mathbf{S} = \left\{ \boldsymbol{\frac{\pi}{12} + 2k\pi \; ; \; \frac{5\pi}{12} + 2\,k\pi} \right\} \qquad \boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$

e) $\sin x = -3$

Comme $-1 \leq \sin x \leq 1$ alors $\sin x = -3$ n'a aucune solution.

Il n'existe pas de réels a tel que $\sin a = -3$

L'ensemble des solutions est : **S =** $\emptyset$