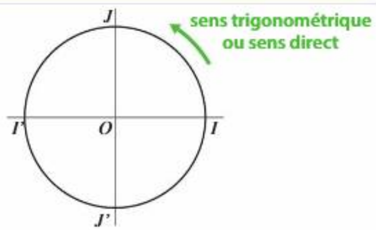
1. Lecture sur le cercle trigonométrique

1. Le cercle trigonométrique

Définition

Dans un repère orthonormé $(O\,;I,J)$, le cercle de centre O et de rayon 1 parcouru de I vers J dans le sens inverse des aiguilles d'une montre est appelé le **cercle trigonométrique**.

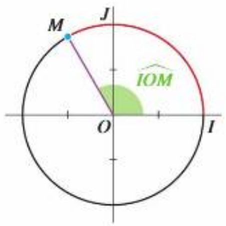
On note I le point de coordonnées (1 ; 0), et J le point de coordonnées (0 ; 1), ainsi que I' et J' les symétriques respectifs de I et J par rapport à O.



2. Longueur d'un arc

Propriété (admise)

Sur le cercle trigonométrique, la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$ (exprimée dans l'unité de longueur du repère) est proportionnelle à la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ exprimée en degré.

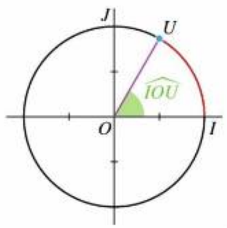


Mesure de $\widehat{IOM}$ en degré	360	180	90	270
Longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

3. Radian

Définition

Soit U le point du cercle trigonométrique tel que l'arc $\overset{\frown}{IU}$ ait pour longueur 1 unité (exprimée dans l'unité de longueur du repère).
On définit un radian (noté 1 rad) comme étant la mesure de l'angle $\widehat{IOU}$.



Propriété (admise)

Les mesures d'un angle en degré, d'une part, et en radian, d'autre part, sont proportionnelles.
On en déduit le tableau de conversion suivant.

Mesure en degré	30	45	60	90	180	1	$\frac{180}{\pi}$
Mesure en radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{180}$	1

$\times \frac{180}{\pi}$ (de radian vers degré) ; $\times \frac{\pi}{180}$ (de degré vers radian)

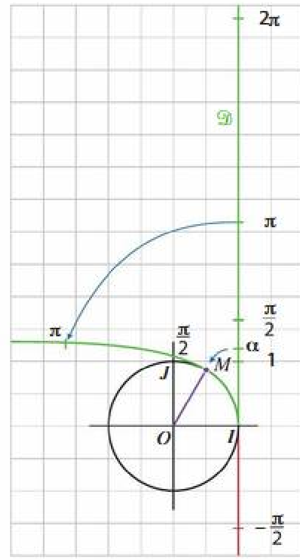
Exemples

- L'arc $\overset{\frown}{IJ}$ a pour longueur $\frac{\pi}{2}$. La mesure en degré de l'angle $\widehat{IOJ}$ est égale à 90°. La mesure en radian de l'angle $\widehat{IOJ}$ est égale à $\frac{\pi}{2}$.

2. Enroulement de la droite des réels

1. Point-image d'un réel

Dans un repère orthonormé $(O\,;I,J)$, on considère le cercle trigonométrique et la tangente $\mathscr{D}$ au cercle au point I. On définit sur cette droite un repère d'origine I comme indiqué sur la figure ci-contre.
On imagine que la droite $\mathscr{D}$ s'enroule autour du cercle.



Propriété (admise)

- Pour tout nombre réel α, le point d'abscisse α sur $\mathscr{D}$ coïncide avec un unique point M du cercle trigonométrique.
M s'appelle **le point-image** de α sur le cercle trigonométrique.
- Réciproquement, à tout point M du cercle trigonométrique correspondent une infinité de valeurs qui peuvent être considérées comme les abscisses de points de la droite $\mathscr{D}$.
Si α est l'abscisse d'un de ces points sur $\mathscr{D}$, tous les autres points de $\mathscr{D}$ ont pour abscisses :

$$\alpha + 2\pi,\ \alpha + 4\pi,\ \ldots,\ \alpha - 2\pi,\ \alpha - 4\pi,\ \ldots$$

Exemples

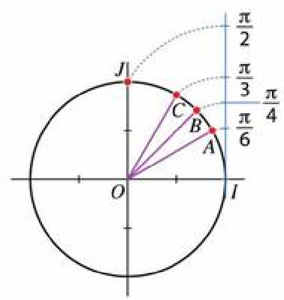
- Soit $\alpha = \pi$. Comme le cercle trigonométrique est de rayon 1, son périmètre vaut 2π. Le point-image de π sur le cercle trigonométrique est donc le point I', point symétrique de I par rapport à O, car la longueur de l'arc $\overset{\frown}{II'}$ est π.
- Au point J correspondent une infinité de valeurs qui sont les abscisses de la forme $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi$, …, $\frac{\pi}{2} - 2\pi$, $\frac{\pi}{2} - 4\pi$, … de points de la droite $\mathscr{D}$.

2. Points-images remarquables du cercle trigonométrique

Propriété (admise)

Sur le cercle trigonométrique, les points I, A, B, C et J sont appelés points remarquables et sont définis par :

- $\widehat{IOI} = 2k\pi$, k entier relatif
- $\widehat{IOA} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, k entier relatif
- $\widehat{IOB} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, k entier relatif
- $\widehat{IOC} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, k entier relatif
- $\widehat{IOJ} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k entier relatif

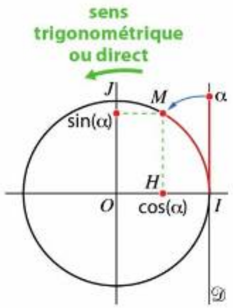


3. Sinus et cosinus d'un nombre réel

1. Définitions

Définitions

Soit α un nombre réel et soit M le point-image de α sur le cercle trigonométrique. Dans le repère $(O ; I, J)$:
- l'abscisse de M est appelée le **cosinus** de α, noté $\cos(\alpha)$;
- l'ordonnée de M est appelée le **sinus** de α, noté $\sin(\alpha)$;
- le point M a pour coordonnées $M(\cos(\alpha) ; \sin(\alpha))$.



Exemple

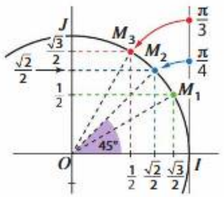
Le réel $\frac{\pi}{2}$ a pour point-image $J(0 ; 1)$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Propriétés

Pour tout réel α, on a :
- $-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$.
- $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$
  $(\cos(\alpha))^2$ peut se noter $\cos^2(\alpha)$.

2. Valeurs remarquables du sinus et du cosinus

Certaines valeurs remarquables de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont à connaître pour des valeurs de α données. Elles correspondent à des positions remarquables du point M sur le cercle trigonométrique.
- I est le point-image de 0.
- M_1 est le point-image de $\frac{\pi}{6}$.
- M_2 est le point-image de $\frac{\pi}{4}$.
- M_3 est le point-image de $\frac{\pi}{3}$.
- J est le point-image de $\frac{\pi}{2}$.



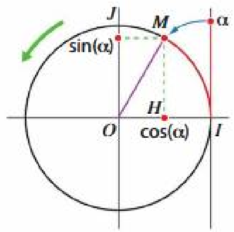
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle en degré	0	30	45	60	90
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

3. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle

On considère le cercle trigonométrique et la tangente $\mathcal{D}$ au cercle.

Pour tout nombre $\alpha \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, d'image M, on considère le point H de l'axe des abscisses tel que (MH) est perpendiculaire à (OI).

On a :
- $\cos(\alpha) = \text{abscisse de } M = \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \cos\left(\widehat{HOM}\right)$
- $\sin(\alpha) = \text{ordonnée de } M = \dfrac{HM}{OM} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \sin\left(\widehat{HOM}\right)$

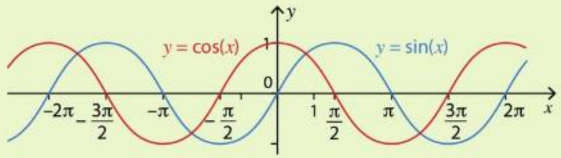


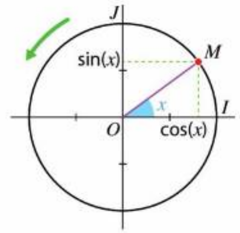
4. Fonctions sinus et cosinus

1. Définition

Définition

La **fonction sinus**, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$.
La **fonction cosinus**, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$.
Leurs courbes représentatives sont appelées des **sinusoïdes.**





Remarque

Pour tout x réel, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

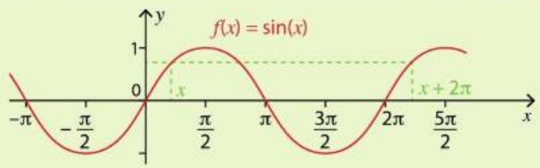
2. Périodicité et parité

Définition

Une fonction trigonométrique f définie sur $\mathbb{R}$ est **périodique de période T** si et seulement si, pour tout réel x, $f(x + T) = f(x)$.

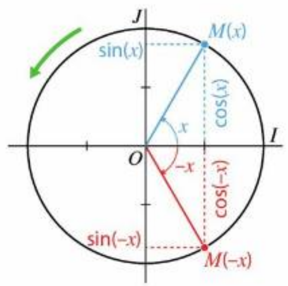
Propriété

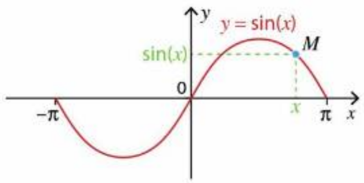
Pour tout x réel, on a $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.
On dit que les fonctions sinus et cosinus sont 2π – périodiques.



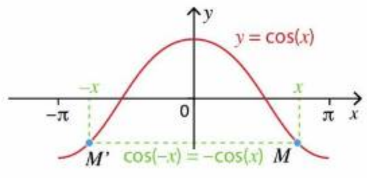
Propriété

Pour tout x réel, on a :
- $\sin(-x) = -\sin(x)$: on dit que la fonction sinus est impaire ;
- $\cos(-x) = \cos(x)$: on dit que la fonction cosinus est paire.





La courbe de la fonction sinus est donc symétrique par rapport à 0.



La courbe de la fonction cosinus est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.