# 1. Fonction carré

## 1. Définition

**Définition**

La **fonction carré** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

**Remarque**

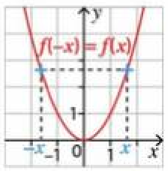
$f(1) = 1$ et $f(2) = 4$. $f(2)$ n'est pas le double de $f(1)$ ; cette fonction n'est donc pas linéaire.

## 2. Représentation graphique

**Définition et propriétés**

- Pour tout réel $x$, $(-x)^2 = x^2$ soit $f(-x) = f(x)$. On dit que la fonction carré est **paire**.
- La représentation graphique de la fonction carré admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

Pour tracer la représentation graphique de la fonction carré, on établit le tableau de valeurs ci-dessous pour des points d'abscisse positive.

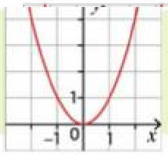



| $x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{9}{4}$ | 4 | 16 |

Les points d'abscisse négative sont ensuite construits par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

**Définitions**

- La représentation graphique de la fonction carré s'appelle **une parabole**.
- Le point $O$, origine du repère, est **le sommet** de la parabole.



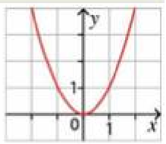

## 3. Variations de la fonction carré

**Propriété**

- Quand les valeurs positives de $x$ augmentent, les valeurs de $f(x)$ augmentent également : la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
- Par symétrie, la fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

On peut résumer les variations dans un tableau de variation.

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | ↘ | 0 | ↗ |




# 2. Fonction cube

## 1. Définition

**Définition**

La **fonction cube** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

**Remarque**

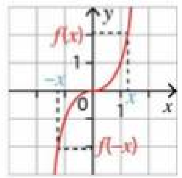
$f(1) = 1$ et $f(2) = 8$.
$f(2)$ n'est pas le double de $f(1)$.
Cette fonction n'est donc pas linéaire.

## 2. Représentation graphique

**Définition et propriété**

- Pour tout réel $x$, $(-x)^3 = -x^3$, soit $f(-x) = -f(x)$. On dit que la fonction cube est **impaire**.
- Dans un repère $(O\,;I,J)$, la courbe représentative de la fonction cube admet l'origine $O$ comme centre de symétrie.

Pour tracer la courbe représentative de la fonction cube, on établit le tableau de valeurs ci-dessous pour des points d'abscisses positives.



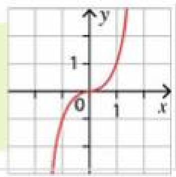

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 0,125 | 1 | 3,375 | 8 | 27 |

Les points d'abscisses négatives sont alors construits par symétrie par rapport à l'origine $O$.

## 3. Variation de la fonction cube

**Propriété**

Quand les valeurs de $x$ augmentent, les valeurs de $f(x)$ augmentent également : la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

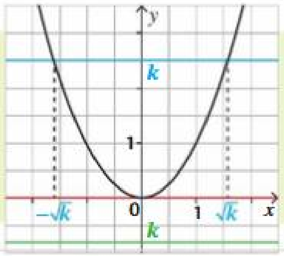



On peut résumer les variations dans un tableau de variation.

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Variation de $f$ | ↗ | |

# 3. Équations et inéquations

## 1. Résolution des équations $x^2 = k$




**Propriété**

L'équation $x^2 = k$ admet :
- deux solutions $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$ lorsque $k > 0$ ;
- une unique solution égale à 0 lorsque $k = 0$ ;
- aucune solution lorsque $k < 0$.

**Exemples**
- L'équation $x^2 = 11$ admet deux solutions, $\mathcal{S} = \{-\sqrt{11}\,;\sqrt{11}\}$.
- L'équation $x^2 = -9$ n'a pas de solution réelle, $\mathcal{S} = \varnothing$.

## 2. Réunion d'intervalles

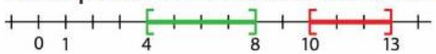
**Définition**

Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$.
On note $I \cup J$ l'ensemble de tous les nombres réels appartenant à $I$ ou à $J$.

**Exemples**

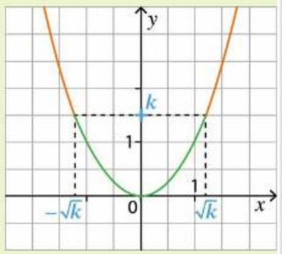

On a : [4 ; 10] ∪ [8 ; 13] = [4 ; 13].

Remarque : La réunion de deux intervalles n'est pas toujours un intervalle.




On ne peut pas écrire [4 ; 8] ∪ [10 ; 13] sous la forme d'un intervalle.

## 3. Résolution des inéquations $x^2 \leqslant k$ et $x^2 \geqslant k$




**Propriété**
- L'inéquation $x^2 \leqslant k$ admet comme ensemble des solutions :
  $\mathcal{S} = [-\sqrt{k}\,;\sqrt{k}]$ lorsque $k > 0$ ;
  $\mathcal{S} = \{0\}$ lorsque $k = 0$ ;
  $\mathcal{S} = \varnothing$ lorsque $k < 0$.
- L'inéquation $x^2 \geqslant k$ admet comme ensemble des solutions :
  $\mathcal{S} = ]-\infty\,;-\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}\,;+\infty[$ lorsque $k > 0$ ;
  $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ lorsque $k \leqslant 0$.

**Exemple**

L'inéquation $x^2 \leqslant 11$ admet pour ensemble de solutions $[-\sqrt{11}\,;\sqrt{11}]$.

# 4. Inéquations produit

## 1. Résolution des inéquations produit

**Propriété**

Pour résoudre l'inéquation $(ax+b)(cx+d) \leqslant 0$ (ou $\geqslant 0$), avec $a, b, c$ et $d$ réels, on étudie, dans un tableau, le signe de chaque facteur et le signe du produit en utilisant la règle des signes. On utilise ce tableau pour conclure.

**Exemple**

On veut résoudre l'inéquation $(2x+3)(-3x-4) \leqslant 0$.
On cherche le signe de chaque facteur en résolvant deux inéquations :

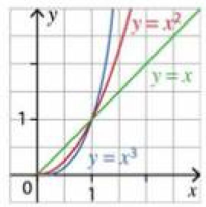
- $2x+3 \leqslant 0 \Leftrightarrow 2x \leqslant -3$
  $\Leftrightarrow x \leqslant -\frac{3}{2}$
- $-3x-4 \leqslant 0 \Leftrightarrow -3x \leqslant 4$ (on divise chaque membre par le réel négatif –3, donc le sens de l'inégalité change).
  $\Leftrightarrow x \geqslant -\frac{4}{3}$

On dresse le tableau de signes suivant.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $-\frac{4}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $2x+3$ | | − | 0 | + | | + | |
| Signe de $-3x-4$ | | + | | + | 0 | − | |
| Signe de $(2x+3)(-3x-4)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$.

## 2. Position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$




**Propriété**
- Pour tout réel $x$ appartenant à [0 ; 1], on a :
  $$x^3 \leqslant x^2 \leqslant x.$$
- Pour tout réel $x$ appartenant à $[1\,;+\infty[$, on a :
  $$x \leqslant x^2 \leqslant x^3.$$