1. Fonction racine carrée

1. Définition

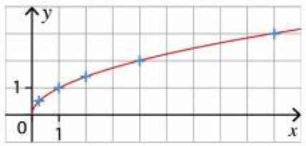
Définition et propriété

- La **racine carrée** d'un nombre réel positif a est l'unique réel positif dont le carré vaut a. La racine carrée de a se note $\sqrt{a}$. On a $\sqrt{a} \geqslant 0$.
- La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

Remarque : $f(1)=1$ et $f(4)=2$.
$f(4)$ n'est pas le quadruple de $f(1)$, la fonction racine carrée n'est donc pas linéaire.

2. Représentation graphique

Pour tracer la courbe représentative de la fonction racine carrée, on établit le tableau de valeurs ci-dessous pour des points d'abscisse positive ou nulle.



x	0	0,25	1	2	4	9
$f(x)$	0	0,5	1	$\approx 1{,}41$	2	3

Remarque : La courbe de la fonction racine carrée est une demi-parabole.

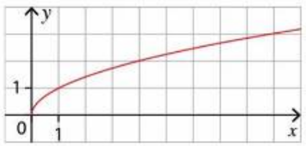
3. Variation de la fonction racine carrée

Propriété

Quand les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ augmentent également.
La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

On peut résumer les variations dans un tableau de variation.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗



4. Propriétés algébriques de la racine carrée

Propriétés

- Soit x un réel. On a $\sqrt{x^2}=|x|$.
- Soient a et b deux réels positifs. On a $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ et, si $b\neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Remarque : $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

2. Fonction inverse

1. Définition et propriété

Définition

La **fonction inverse** est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*=]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par la relation $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Remarques

- 0 n'a pas d'image par la fonction inverse, on dit que 0 est une « valeur interdite » pour cette fonction.
- Si on multiplie un nombre réel par son inverse, on obtient 1 : $x\times\dfrac{1}{x}=1$.
- Pour tout nombre réel x non nul, l'inverse de $\dfrac{1}{x}$ est x.

Propriété et définition

- La courbe représentative de la fonction inverse s'appelle une **hyperbole**.
- Elle est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

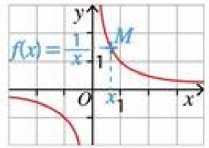


Tableau de valeurs de la fonction inverse

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	−0,2	−0,25	≈ −0,33	−0,5	−1		1	0,5	≈ 0,33	0,25	0,2

Remarques

- Le tableau de valeurs n'est pas un tableau de proportionnalité, donc f n'est pas linéaire.
- $M(x\,;y)$ appartient à l'hyperbole si et seulement si $y=\dfrac{1}{x}$ avec x non nul.

2. Variations de la fonction inverse

Propriété

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	↘	‖	↘

Remarques

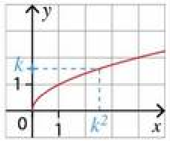
- Dans le tableau de variation, la double barre sous le 0 signifie que 0 est une valeur interdite, c'est-à-dire que la fonction n'est pas définie pour $x=0$.
- On ne peut pas dire que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$. En effet, l'affirmation : « Lorsque les valeurs de x augmentent sur $\mathbb{R}^*$, leurs inverses diminuent » est fausse. Par exemple, 1 est plus grand que −2, et 1 (l'inverse de 1) est plus grand que $-\dfrac{1}{2}$ (l'inverse de −2).

3. Équations et inéquations avec la fonction racine carrée

1. Résolution de l'équation $\sqrt{x} = k$

Propriété

Soit k un nombre réel.
Pour tout réel x positif ou nul, l'équation $\sqrt{x} = k$ a pour ensemble de solutions :
- $\mathcal{S} = \{k^2\}$ si $k \geqslant 0$;
- $\mathcal{S} = \varnothing$ si $k < 0$.



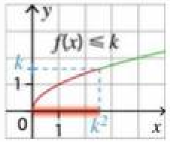
Exemple

L'équation $\sqrt{x} = 3$ a pour ensemble de solutions $\mathcal{S} = \{9\}$.

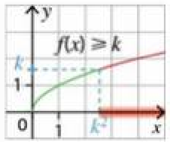
2. Résolution des inéquations $\sqrt{x} \leqslant k$ et $\sqrt{x} \geqslant k$

Propriété

Soit k un nombre réel.
- Pour tout réel x positif ou nul, l'inéquation $\sqrt{x} \leqslant k$ a pour ensemble de solutions :
  $\mathcal{S} = [0\,;k^2]$ si $k \geqslant 0$;
  $\mathcal{S} = \varnothing$ si $k < 0$.



- Pour tout réel x positif ou nul, l'inéquation $\sqrt{x} \geqslant k$ a pour ensemble de solutions :
  $\mathcal{S} = [k^2\,;+\infty[$ si $k \geqslant 0$;
  $\mathcal{S} = [0\,;+\infty[$ si $k < 0$.



Exemples
- L'inéquation $\sqrt{x} \leqslant 1$ a pour ensemble de solutions $\mathcal{S} = [0\,;1]$.
- L'inéquation $\sqrt{x} \geqslant 5$ a pour ensemble de solutions $\mathcal{S} = [25\,;+\infty[$.

Remarques

On résout de même les inéquations $\sqrt{x} < k$ et $\sqrt{x} > k$.
- $\sqrt{x} < k$
  $\mathcal{S} = [0\,;k^2[$ si $k \geqslant 0$;.
  $\mathcal{S} = \varnothing$ si $k < 0$.
- $\sqrt{x} > k$
  $\mathcal{S} =]k^2\,;+\infty[$ si $k \geqslant 0$;
  $\mathcal{S} = [0\,;+\infty[$ si $k < 0$.

4. Équations et inéquations avec la fonction inverse

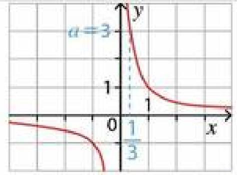
1. Résolution de l'équation $\dfrac{1}{x} = a$

Propriété

Pour tout réel non nul a, l'équation $\dfrac{1}{x} = a$ admet pour unique solution $\dfrac{1}{a}$.

Exemple

On veut résoudre l'équation $\dfrac{1}{x} = 3$.
$\dfrac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$. La solution de l'équation est $\dfrac{1}{3}$.
On peut la visualiser sur le graphique ci-contre.



Propriété

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur est non nul.

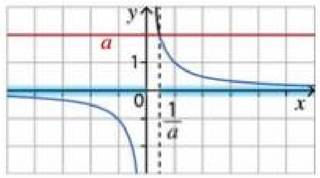
Exemple

On veut résoudre l'équation $\dfrac{x+7}{x-1} = 0$.
D'après la propriété, on doit avoir $x + 7 = 0$ et $x - 1 \neq 0$, autrement dit $x \neq 1$.
La solution est donc $x = -7$.

2. Résolution de l'inéquation $\dfrac{1}{x} \leqslant a$

Propriété

Pour tout réel non nul a, l'inéquation $\dfrac{1}{x} \leqslant a$ avec $x \neq 0$ admet une infinité de solutions.
L'ensemble de ces solutions peut s'écrire à l'aide d'intervalles.



Exemple

L'inéquation $\dfrac{1}{x} \leqslant 2$ admet pour solutions l'ensemble $]-\infty\,;0[\cup \left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

3. Résolution des inéquations du type $\dfrac{A(x)}{B(x)} \leqslant 0$ (ou $\geqslant 0$)

Propriété

Résoudre $\dfrac{A(x)}{B(x)} \leqslant 0$ ou $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0$ revient à chercher le signe du quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)}$.
Le signe d'un quotient dépend du signe du numérateur et du dénominateur.
Pour le déterminer, on réalise un tableau de signes.