# 1. Variable aléatoire réelle sur un ensemble fini

## 1. Modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire

**Exemples**

On considère l'expérience aléatoire suivante.
Un joueur lance un dé cubique équilibré : si le résultat est 6, le joueur gagne 9 €, sinon le joueur perd 3 €.

| Résultat du dé | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeur du gain | –3 | –3 | –3 | –3 | –3 | 9 |

On peut considérer le « gain algébrique » du joueur : ce gain est égal soit à 9 (s'il gagne), soit à –3 (s'il perd). Ce gain est donc une variable qui peut prendre deux valeurs selon le résultat de l'expérience aléatoire. On peut modéliser cette expérience aléatoire en définissant un univers composé des six issues correspondant aux résultats du dé, puis en associant à chacune de ces issues une valeur du gain.

## 2. Variable aléatoire

**Définition**

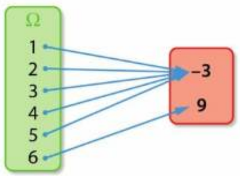
On considère une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble fini noté $\Omega$.
Une **variable aléatoire** $X$ est une fonction définie sur $\Omega$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

**Remarque**

Définir une variable aléatoire $X$ consiste donc à associer, à chaque issue de l'expérience aléatoire, un nombre réel.

**Exemple**

On considère le jeu précédent et on note $X$ le gain algébrique du joueur.
$X$ est une variable aléatoire définie sur $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$, et qui peut prendre les valeurs –3 et 9.
Lorsque le résultat du dé est 1, 2, 3, 4 ou 5, $X$ prend la valeur –3.
On note cet évènement $\{X = -3\}$.
Lorsque le résultat du dé est 6, $X$ prend la valeur 9.
On note cet évènement $\{X = 9\}$.




## 3. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

**Définition**

Donner la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire $X$, c'est donner, pour chaque valeur $x_i$ que peut prendre $X$, la probabilité de l'évènement $\{X = x_i\}$, notée $P(X = x_i)$.

**Exemples**

Dans l'exemple précédent, l'évènement $\{X = 9\}$ est réalisé par une seule issue : 6. Sa probabilité vaut $\frac{1}{6}$.
L'évènement $\{X = -3\}$ est réalisé par les issues 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. Sa probabilité vaut $\frac{5}{6}$.
La loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ est donc donnée dans le tableau ci-contre.

| $x_i$ | –3 | 9 |
|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

**Remarque**

Pour une variable aléatoire $X$ prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$, on a toujours :
$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) = 1.$$

# 2. Paramètres d'une variable aléatoire

## Espérance, variance et écart type

**Définition**

On considère une expérience aléatoire d'univers fini $\Omega$ et une loi de probabilité $P$ associée à cette expérience.
Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$ et qui prend n valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ de probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$.

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

- L'**espérance** de $X$ est le nombre noté $E(X)$ défini par :
$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$
- La **variance** de $X$ est le nombre noté $V(X)$ défini par :
$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2.$$
- L'**écart type** de $X$ est le nombre noté $\sigma(X)$ défini par :
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

**Remarque**

On peut également noter :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad \text{et} \quad V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2.$$

**Exemple**

Soit $X$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la suivante.

| $x_i$ | –3 | 9 |
|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

On a :
- $E(X) = -3 \times \frac{5}{6} + 9 \times \frac{1}{6} = -1$
- $V(X) = \frac{5}{6}(-3 + 1)^2 + \frac{1}{6}(9 + 1)^2 = 20$
- $\sigma(X) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

**Interprétation**

- De façon générale, l'espérance d'une variable aléatoire $X$ peut être interprétée comme la moyenne des valeurs prises par $X$ sur un grand nombre de répétitions de cette même expérience aléatoire.
  Dans cet exemple, cette moyenne est égale à –1 €.
  Si la variable aléatoire $X$ désigne le gain d'un jeu, on dit que ce jeu est **équitable** lorsque $E(X) = 0$.
- Par analogie avec les statistiques, de la même façon que $E(X)$ représente une moyenne, $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont des indicateurs de dispersion des valeurs de $X$ autour de $E(X)$.
  Plus la variance et l'écart type sont grands, plus les valeurs sont dispersées autour de la moyenne (espérance).