1. Expérience aléatoire

1. Expérience aléatoire et vocabulaire

Définitions

- Une **expérience** est dite **aléatoire** si on ne peut pas en prévoir le résultat à l'avance.
- Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé une **issue**.
- L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers** de l'expérience. Il est généralement noté Ω (« oméga »).
- On appelle **évènement** une partie de l'univers Ω ; c'est donc un ensemble d'issues.
- L'**évènement contraire** d'un évènement A, noté $\overline{A}$, est l'évènement formé par toutes les issues qui ne réalisent pas l'évènement A.

Remarques

- Un évènement qui se réalise toujours est constitué de toutes les issues de l'univers. On l'appelle « **évènement certain** » et on le note Ω.
- Un évènement qui ne peut pas se réaliser ne contient aucune issue. On l'appelle « **évènement impossible** » et on le note Ø (« ensemble vide »).
- Un évènement qui ne contient qu'une seule issue est appelé **évènement élémentaire**.
- L'ensemble $\overline{A}$ est également appelé le **complémentaire** de A dans Ω, que l'on note $\Omega \setminus A$.

2. Modélisation d'une expérience aléatoire

Définition

Choisir un **modèle de probabilité** pour une expérience aléatoire, c'est associer à chaque issue un nombre compris entre 0 et 1 appelé **probabilité de l'issue**, de sorte que la somme des probabilités de toutes les issues soit égale à 1. On définit ainsi une **loi de probabilité**.

Définition et propriétés

- Quand chaque issue a autant de chances de se produire qu'une autre, on est en **situation d'équiprobabilité**. Si une expérience comporte n issues équiprobables, la probabilité de chacune d'elles est égale à $\frac{1}{n}$.
- Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition de chaque issue se stabilise autour d'une valeur. On prend alors cette valeur comme probabilité de l'issue.

Exemples

Pour un dé non truqué, on choisit :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Les issues sont équiprobables.

Pour un dé truqué, l'expérience donne :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Les issues ne sont pas équiprobables.

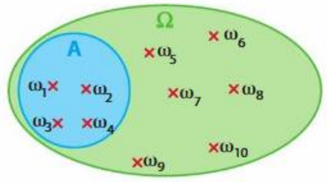
2. Calculs de probabilités

1. Probabilité d'un évènement

Définition

La **probabilité d'un évènement** est la somme des probabilités des issues qui constituent cet évènement.

Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}$ les dix issues d'une expérience aléatoire, et $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ leurs probabilités respectives. On peut représenter ces issues par un diagramme de Venn.
On voit ici l'évènement $A = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \omega_3 ; \omega_4\}$ contenu dans l'univers $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \omega_3 ; \omega_4 ; \omega_5 ; \omega_6 ; \omega_7 ; \omega_8 ; \omega_9 ; \omega_{10}\}$.
On a $P(A) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ et $P(\overline{A}) = p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10}$.



Propriétés

- Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est égale à :

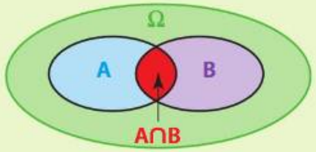
$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$$

- Pour tout évènement A, on a $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. Réunion et intersection d'évènements

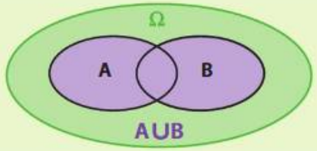
Définition

On appelle **A ∩ B** (on dit « A inter B ») l'évènement constitué des issues qui sont **à la fois** dans A et dans B.



Définition

On appelle **A ∪ B** (on dit « A union B ») l'évènement constitué des issues qui sont dans A **ou** dans B (c'est-à-dire dans A, dans B ou dans les deux).



Propriété

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Remarque

Si A et B n'ont aucune issue en commun, alors $A \cap B = Ø$. On dit que A et B sont **disjoints** ou **incompatibles**. On a alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3. Dénombrement

1. Tableau à double entrée

Un **tableau à double entrée** permet de dénombrer les issues d'une expérience aléatoire, en particulier lorsqu'on étudie simultanément deux caractères d'une même population.

Exemple

On choisit au hasard une des 67,2 millions de personnes de la population française, et on s'intéresse à son rhésus sanguin et à son groupe sanguin.
Le tableau ci-contre donne la répartition en France, en million de personnes, des groupes et rhésus sanguins.
On peut y lire par exemple :

- $P(\text{« Groupe A »} \cap \text{« Rhésus + »}) = \dfrac{24\,900\,000}{67\,200\,000} \approx 0{,}37$
- $P(\text{« Groupe B »}) = \dfrac{6\,000\,000 + 700\,000}{67\,200\,000} \approx 0{,}1$

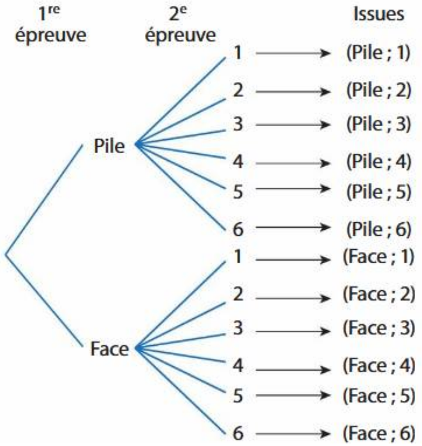
	O	A	B	AB
Rhésus +	24,2	24,9	6	2
Rhésus –	4	4,7	0,7	0,7

2. Arbre

Un **arbre** permet de représenter et dénombrer les issues d'une expérience aléatoire, en particulier lorsqu'on a une succession de plusieurs épreuves.

Exemple

On lance une pièce équilibrée puis on lance un dé à six faces équilibré.
On peut construire l'arbre ci-dessous, sur lequel on a représenté la première épreuve (le lancer de la pièce) puis la deuxième épreuve (le lancer du dé).



- Cet arbre permet déterminer le nombre total d'issues de cette expérience aléatoire : $2 \times 6 = 12$.
- Soit A l'évènement « Obtenir Pile puis un nombre pair ». L'évènement A contient trois issues.

Toutes les issues sont équiprobables donc $P(\text{A}) = \dfrac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre d'issues de }\Omega} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

Comprendre une démonstration

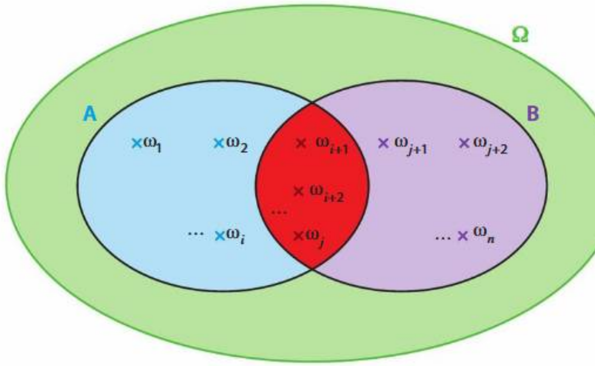
On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions posées.

Soient A et B deux évènements d'un univers .
$P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A} \cap \text{B})$.

Démonstration

Soit n un entier naturel non nul.
Soit une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \ldots ; \omega_n\}$ dont les probabilités des issues sont respectivement $p_1, p_2, \ldots, p_n$. On note :

- $\omega_1 ; \ldots ; \omega_i$ les issues qui sont dans A mais pas dans B ;
- $\omega_{i+1} ; \ldots ; \omega_j$ les issues qui sont dans A et dans B ;
- $\omega_{j+1} ; \ldots ; \omega_n$ les issues qui sont dans B mais pas dans A.



Avec ces notations, on a :

$$P(\text{A}) = p_1 + \ldots + p_i + p_{i+1} + \ldots + p_j$$
$$P(\text{B}) = p_{i+1} + \ldots + p_j + p_{j+1} + \ldots + p_n$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & \quad P(\text{A}) \qquad + \qquad P(\text{B}) \\ &= p_1 + \ldots + p_i + p_{i+1} + \ldots + p_j + p_{i+1} + \ldots + p_j + p_{j+1} + \ldots + p_n \\ &= p_1 + \ldots + p_i + p_{i+1} + \ldots + p_j + p_{j+1} + \ldots + p_n + p_{i+1} + \ldots + p_j \\ &= \quad P(\text{A} \cup \text{B}) \qquad + \quad P(\text{A} \cap \text{B}) \end{aligned}$$

Conclusion

On obtient donc $P(\text{A}) + P(\text{B}) = P(\text{A} \cup \text{B}) + P(\text{A} \cap \text{B})$, donc $P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A} \cap \text{B})$.