1. Colinéarité

1. Vecteurs colinéaires

Définition

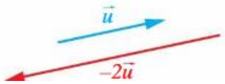
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarques

- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.
- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Exemple

Les vecteurs $\vec{u}$ et $-2\vec{u}$ sont colinéaires.



2. Déterminant de deux vecteurs

Définition

Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ le nombre $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$.

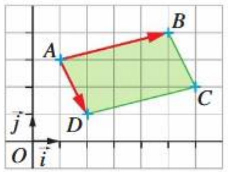
Propriété

Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée et $ABCD$ un parallélogramme.
L'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.

Exemple

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 1 cm, soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = -9$. L'aire de $ABCD$ est égale à 9 cm².



Propriété

Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Propriété

Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Exemple

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée. On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1$.

$\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Remarque

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

2. Parallélisme et alignement

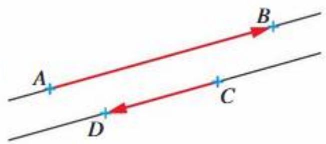
1. Droites parallèles

Propriété

Soient A, B, C et D quatre points distincts.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exemple

Soient quatre points A, B, C et D tels que $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



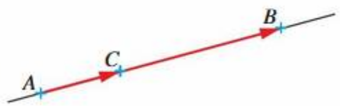
2. Points alignés

Propriété

Trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple

Soient trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.



3. Milieu d'un segment

Propriétés

Soient A et B deux points.

- Le point I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.
- Soient $(x_A\,;y_A)$ et $(x_B\,;y_B)$ les coordonnées respectives de A et de B dans un repère.

Le point I est le milieu de $[AB]$ si et seulement s'il a pour coordonnées :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Remarque

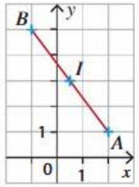
$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Exemple

Soient deux points $A(2\,;1)$ et $B(-1\,;5)$ et soit I le milieu de $[AB]$.

$x_I = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_I = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Le point I a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;3\right)$.



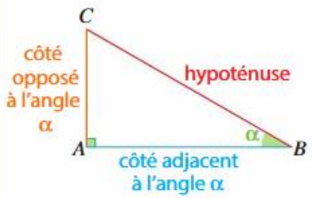
3. Orthogonalité

1. Relations trigonométriques dans un triangle rectangle

Définition et propriété

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note α l'angle $\widehat{ABC}$.

- $\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \alpha}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$
- $\sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé adjacent à l'angle } \alpha}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$
- $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \alpha}{\text{côté adjacent à l'angle } \alpha} = \frac{AC}{AB}$



Propriétés

Soient ABC un triangle rectangle en A et α un angle aigu de ce triangle. On a :

- $0 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$ et $0 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$;
- $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

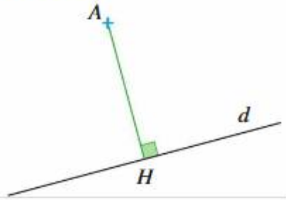
Remarque

La notation $\cos^2(\alpha)$ signifie $(\cos(\alpha))^2$, soit $\cos(\alpha) \times \cos(\alpha)$.

2. Projeté orthogonal d'un point sur une droite

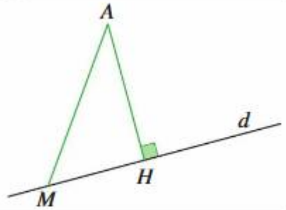
Définition

Soient A un point et d une droite.
On appelle **projeté orthogonal** de A sur d le point H de d tel que $(AH) \perp d$.



Propriété et définition

Soient A un point et d une droite.
Le projeté orthogonal H de A sur d est le point de la droite d le plus proche du point A.
La distance AH est appelée **distance du point A à la droite d**.



Définition

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et rayon r.
On dit qu'une droite d est une tangente au cercle $\mathscr{C}$ lorsque la distance du point O à la droite d est égale à r.