Fonctions de référence
Variation des fonctions associées

Table des matières

1 Fonction numérique

1.1 Définition

Définition 1 : Une fonction numérique f d'une variable réelle x est une relation qui à un nombre réel x associe un unique nombre réel y noté $f(x)$. On écrit alors :

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathbb{R} \text{ ou } D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

⚠ Il faut faire la différence entre la fonction f qui représente une relation et $f(x)$ qui représente l'image de x par f qui est un nombre réel.

Remarque :

- On dit que $y = f(x)$ est **l'image** de x par f et
- x est **un antécédent** (non unique) de $y = f(x)$ par f

Exemples : :

- $f(x) = 3x - 7$ f est une fonction affine
- $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$ f est une fonction du second degré
- $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-3}$ f est une fonction homographique

1.2 Ensemble de définition

Définition 2 : L'ensemble définition d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction est définie

Exemples :

- La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{4-x}$ est telle que $D_f =]-\infty\,;\,4]$
  (on doit avoir $4 - x \geqslant 0$)
- La fonction g définie par $g(x) = \dfrac{3}{x^2 - 5x - 6}$ est telle que $D_g = \mathbb{R} - \{-1\,;\,6\}$
  (on doit avoir $x^2 - 5x - 6 \neq 0$, $x = -1$ racine évidente)

1.3 Comparaison de fonctions

Définition 3 : On dit que deux fonctions f et g sont égales si et seulement si :

- Elles ont même ensemble de définition : $D_f = D_g$
- Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = g(x)$

Exemple : Les fonction f et g suivantes sont-elles égales ?

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f, on doit avoir : $\dfrac{x-1}{x+3} \geqslant 0$, soit $D_f =]-\infty\,;-3[\cup [1\,;+\infty[$

Pour g, on doit avoir : $x-1 \geqslant 0$ et $x+3 > 0$, soit $D_g = [1\,;+\infty[$

On a donc : $D_f \neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales.

Remarque : Cependant sur $[1\,;+\infty[$, on a $f(x) = g(x)$

Définition 4 : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

On dit que, sur I :

- f est inférieure à g , noté $f < g$ si, et seulement si : $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant g(x)$.
- f est positive, noté $f > 0$ si, et seulement si : $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \geqslant 0$.
- f admet un maximum x_M si, et seulement si : $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant f(x_M)$.
- f admet un minimum x_m, si, et seulement si : $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \geqslant f(x_m)$.
- f admet un extremum ssi, f admet un minimum ou un maximum.

Remarque : Deux fonctions ne sont pas toujours comparables (contrairement aux nombres réels). On dit que la relation d'ordre n'est pas totale. Par exemple :

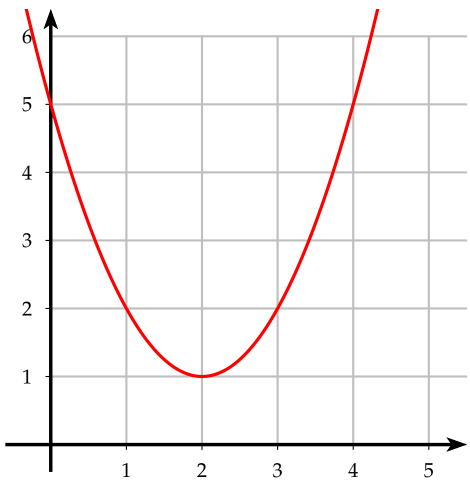
Les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

- Si $0 < x < 1, \quad x > x^2$, soit $f > g \quad (0,5 > 0,5^2)$
- Si $x > 1, \quad x < x^2$, soit $f < g \quad (2 < 2^2)$

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)^2 + 1$

La fonction f a pour tableau de variation :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$



La fonction f est donc positive $f \geqslant 1$ et admet en 2 un minimum de 1 sur $\mathbb{R}$.

2 Variation d'une fonction

Définition 5 : Soit I un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non).

a et b deux réel de I

Soit f une fonction définie au moins sur I. On dit que :

- f est **croissante** sur I si, et seulement si : $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
- f est **décroissante** sur I si, et seulement si : $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$
- f est **monotone** sur I si, et seulement si f est croissante ou décroissante sur I.

Remarque : On dit qu'une fonction croissante conserve la relation d'ordre et qu'une fonction décroissante inverse la relation d'ordre.

Pour montrer la monotonie d'une fonction sur I, on prendra deux réels a et b de I tel que $a > b$ et l'on étudiera le signe de $f(a) - f(b)$. Si le signe est positif la fonction est croissante, si le signe est négatif la fonction est décroissante.

Exemple : La fonction affine f définie par : $f(x) = 2x + 3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car son coefficient directeur est positif.

La fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;\,0[$.

3 Résolution graphique

Soit la fonction f définie sur $[-1,8\,;\,2,9]$ par : $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 15$.

À l'aide d'une représentation graphique, résoudre les questions suivantes.

Toutes les valeurs seront données à la précision du dixième

1) Déterminer le tableau de variation de la fonction f

2) Résoudre les équations suivantes :

   a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 13$

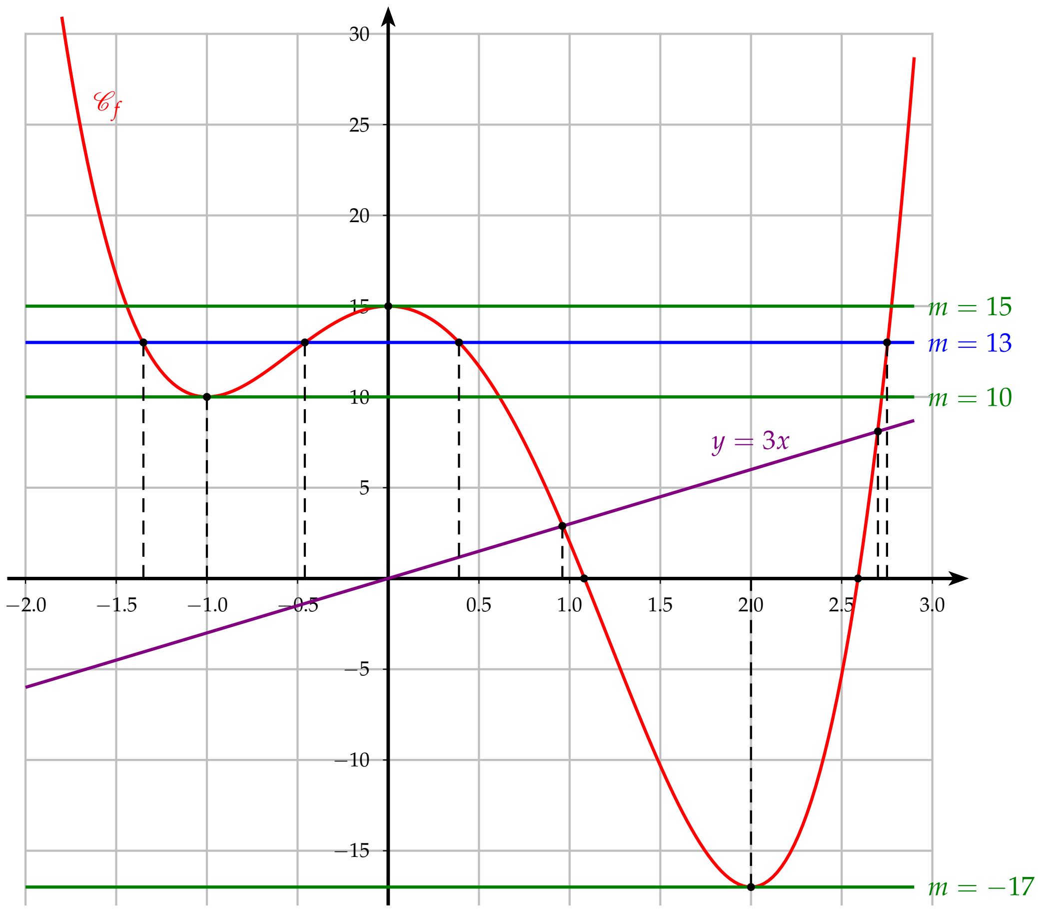
3) D'une façon générale donner le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$ où m est un réel quelconque.

4) Résoudre les inéquations suivantes :

   a) $f(x) \leqslant 0$ b) $f(x) > 13$

5) Résoudre l'équation $f(x) = 3x$

On programme cette fonction dans une calculette ou un ordinateur. On trouve alors la représentation suivante :



1) On obtient le tableau de variation suivant :

x	-1.8		-1		0		2		2.9
$f(x)$	31	↘	10	↗	15	↘	-17	↗	29

2) a) $f(x) = 0$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses. Avec la calculette, aller dans "*calcul*" sélectionner "*zero*". On obtient : $x_1 \simeq 1,1$ et $x_2 \simeq 2,6$

b) $f(x) = 13$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite $y = 13$. Dans la calculette, entrer la fonction "$Y = 13$" puis aller dans "*calcul*" sélectionner "*intersect*". On obtient : $x_1 \simeq -1,3$, $x_2 \simeq -0,4$, $x_3 \simeq 0,4$ et $x_4 \simeq 2,75$.

3) $f(x) = m$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite $y = m$. On obtient donc suivant les valeurs de m :

- Si $m < -17$: l'équation n'a pas de solution
- Si $m = -17$: l'équation admet une solution (positive)
- Si $-17 < m < 10$: l'équation admet deux solutions (2 positives)
- Si $m = 10$: l'équation admet 3 solutions (1 négative et 2 positives)
- Si $10 < m < 15$: l'équation admet 4 solutions (2 négatives et 2 positives)

- Si $m = 15$: l'équation admet 3 solutions (1 négative, 1 nulle et 1 positive)
- Si $m > 15$: l'équation admet 2 solutions (1 négative et 1 positive)

4) a) $f(x) \leqslant 0$: on cherche les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui sont sur ou en dessous de la droite des abscisses, on a donc : $S = [1,1\,;\,2,6]$

   b) $f(x) > 13$: on cherche les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessus de la droite d'équation $y = 13$, on a donc :

$$S = [-1,8\,; -1,3[\,\cup\,]-0,4\,;\,0,4[\,\cup\,]2,75\,;\,2,9]$$

5) $f(x) = 3x$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite d'équation $y = 3x$. On trace la droite $y = 3x$ puis on lit les solutions : $x_1 \simeq 0,9$ et $x_2 \simeq 2,7$

4 Fonctions de référence

4.1 Fonction affine

Propriété 1 : Une fonction affine f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b$$

Le signe du coefficient directeur a donne les variations de la fonction :

si $a > 0$, f est croissante et si $a < 0$, f est décroissante

La représentation d'une fonction affine est une **droite** qui passe par le point $(0\,;\,b)$

4.2 Fonction carrée

Propriété 2 : La fonction carrée f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2$$

La fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur R_+.

La représentation de la fonction carrée est une **parabole** d'axe Oy dont le sommet est l'origine.

4.3 Fonction inverse

Propriété 3 : La fonction inverse f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;+\infty[$

La représentation de la fonction inverse est une **hyperbole** équilatère dont le point de symétrie est l'origine et les **asymptotes** les axes de coordonnées.

⚠ C'est une faute de dire que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car la monotonie s'étudie sur un intervalle.

4.4 La fonction racine carrée

4.4.1 Étude de la fonction racine carrée

Propriété 4 : La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

La représentation de la fonction racine carrée est la demi-parabole d'ordonnées positives d'axe Ox.

Montrons que la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Soit a et b deux réels positifs ou nuls tel que $a > b$. Déterminons le signe de $f(a) - f(b)$.

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

- Par définition de la racine carrée, on a $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$
- De plus comme $a > b$, on a : $a - b > 0$
- On a donc $f(a) - f(b) > 0$

La fonction racine carrée est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a alors le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$

La représentation de la fonction racine carrée est une demi-parabole d'ordonnées positives d'axe Ox. Elle admet une tangente verticale en 0.

On peut remplir le tableau de valeur suivant :

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$\sqrt{x}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3

4.4.2 Comparaison des fonctions carrée, identité et racine carrée

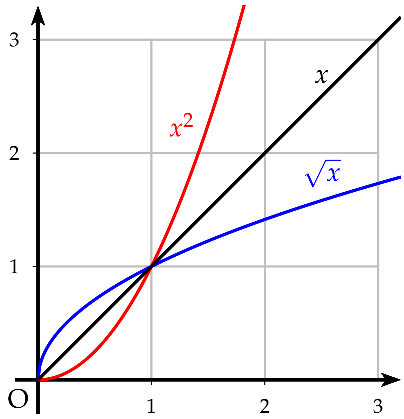
Théorème 1 : Pour tout réel x positif ou nul, on a les relations suivante :

$$\text{si } x \in [0\,;\,1], \quad x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x} \quad \text{et si } x \in [1\,;+\infty[, \quad \sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$$

Remarque : On observe que le rapport de ces fonctions s'inverse autour de 1 comme le montrent les représentations suivantes :

On a tracé les fonctions carrée, identité et racine carrée.
On constate que :

- si $x < 1$ la fonction carrée est **en dessous** de la fonction identité qui est **en dessous** de la fonction racine carrée.
- si $x > 1$ la fonction carrée est **au dessus** de la fonction identité qui est **au dessus** de la fonction racine carrée.



Soit x un réel positif ou nul : $\quad (\forall x \geqslant 0, \ \sqrt{x^2} = |x| = x)$

- si $x \leqslant 1$, on multiplie par x chaque côté de l'inégalité donc $x^2 \leqslant x$
  Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle ne change pas les inégalités, donc $\sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x} \ \Rightarrow x \leqslant \sqrt{x}$
- si $x \geqslant 1$, on multiplie par x chaque côté de l'inégalité donc $x^2 \geqslant x$
  Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle ne change pas les inégalités, donc $\sqrt{x^2} \geqslant \sqrt{x} \ \Rightarrow x \geqslant \sqrt{x}$

4.5 La fonction valeur absolue

4.5.1 Définition

La notion de valeur absolue est utilisée lorsque l'on s'intéresse à la valeur d'un nombre sans son signe. C'est à dire que l'on ne considère par exemple dans -5 que le nombre 5.

Définition 6 : On appelle valeur absolue d'un nombre réel x, le nombre noté $|x|$ tel que :

$$|x| = x \quad \text{si} \quad x \geqslant 0$$
$$|x| = -x \quad \text{si} \quad x < 0$$

Exemple : $|-5| = 5 \quad \text{et} \quad |21| = 21$

Remarque : La valeur absolue représente la distance entre deux nombres : en effet dans la distance, on ne s'intéresse qu'à la valeur positive. La distance d entre 8 et 3 vaut $d = |8-3| = |3-8| = 5$

Algorithme : On peut proposer l'algorithme suivant pour calculer la valeur absolue d'un nombre réel.
On remarque qu'il n'est pas nécessaire de tester si x est positif, car dans ce cas la valeur absolue ne "*fait*" rien.

```
Variables : X : réel
Entrées et initialisation
    Lire X
Traitement
    si X < 0 alors
        −X → X
    fin
Sorties : Afficher X
```

Propriété 5 : La fonction valeur absolue possède les propriétés suivantes :

- $|x-a|$ représente la distance de x au nombre a.
- On a l'égalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = |x|$
- Deux nombres opposés ont même valeur absolue : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = |-x|$
  On dit que la fonction valeur absolue est **paire**
- Deux valeurs absolues sont égales ssi, les nombres sont égaux ou opposés :
  $$|x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$$
- L'inégalité triangulaire : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
- On peut exprimer un intervalle à l'aide d'une valeur absolue, avec $r > 0$:
  $$|x-a| < r \quad \Leftrightarrow \quad x \in]a-r\,;\,a+r[$$
  r est alors le rayon de l'intervalle.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $|2x-2| = |3-x|$
comme $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$, on a alors :
$$2x-2 = 3-x \quad \text{ou} \quad 2x-2 = -3+x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{3} \text{ ou } x = -1$$

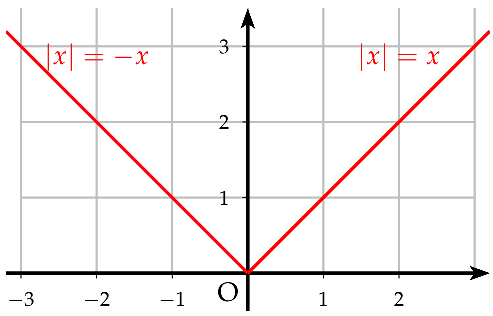
4.5.2 Variation

La fonction valeur absolue est une fonction affine définie par morceaux. Sa représentation est alors deux demi-droite.

- Si $x > 0$, $|x| = x$ la fonction est croissante
- Si $x < 0$, $|x| = -x$ la fonction est décroissante

On obtient alors le tableau de variation et la représentation suivante :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x \rvert$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$



La représentation de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

5 Sens de variation des fonctions associées

5.1 Somme de fonctions

Théorème 2 : Soit un réel k et 2 fonctions u et v définies sur un intervalle I

- Les fonction u et $u + k$ ont même sens de variation.
- Si les fonctions u et v sont croissantes alors $u + v$ est croissante.
- Si les fonctions u et v sont décroissantes alors $u + v$ est décroissante.

⚠ Si les fonction u et v n'ont pas les mêmes variations, on ne peut rien dire de leur somme.

Exemples : Déterminer les variations des fonctions suivantes définies sur I

a) $f(x) = x^2 - 5$ avec I$= \mathbb{R}$

b) $g(x) = -5x + 3 + \dfrac{1}{x}$ avec I$=]0\,;+\infty[$

c) $h(x) = x^2 + 2x - 5$ avec I$= [0\,;+\infty[$

⇒ ⇒

a) On décompose la fonction f en $u + k$ avec $u(x) = x^2$ et $k = -5$. La fonction f a donc les mêmes variations que la fonction carrée.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-5	↗ $+\infty$

b) On décompose la fonction g en $u + v$ avec $u(x) = -5x + 3$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$

- La fonction u est une fonction affine de coefficient directeur $a = -5 < 0$. La fonction u est donc décroissante sur $]0\,;+\infty[$
- La fonction v est la fonction inverse qui est décroissante sur $]0\,;+\infty[$

Par somme de fonctions décroissantes, la fonction g est décroissante sur $]0\,;+\infty[$

c) On décompose la fonction h en $u + v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = 2x - 5$.

- La fonction u est la fonction carrée qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction v est une fonction affine de coefficient directeur $a = 2 > 0$. La fonction v est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par somme la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}_+$

⚠ On ne peut rien dire de la fonction h sur $\mathbb{R}_-$ car les fonction u et v ont des variations inverses. (u décroissante et v croissante).

5.2 Produit par une constante

Théorème 3 : Soit un réel λ et une fonction u définie sur un intervalle I

- Si $\lambda > 0$, les fonction u et λu ont les mêmes variations
- Si $\lambda < 0$, les fonction u et λu ont des variations contraires

Exemple : Tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\dfrac{4}{x}$

On décompose la fonction f en u et λ avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\lambda = -4$.

- Comme $\lambda < 0$ les fonctions u et λu ont des variations contraires.
- u est la fonction inverse donc décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;+\infty[$, donc
- Par produit la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et $]0\,;+\infty[$.

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

5.3 Racine carrée et inverse d'une fonction

Théorème 4 : Soit une fonction u définie sur un intervalle I

Racine carrée
Soit une fonction u **positive** sur I, alors les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations

Inverse
Soit une fonction u **non nul**.
Si u a un **signe constant** sur I, alors les fonctions u et $\dfrac{1}{u}$ ont des variations contraires

Cas pour lequel la fonction u est croissante sur un intervalle I.

Comme la fonction u est croissante, si $a > b$ sont deux réels de I, on a :

$$u(a) > u(b)$$

- La fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$, comme $u \geqslant 0$, on a alors :

$$\sqrt{u(a)} > \sqrt{u(b)} \qquad \text{la fonction } \sqrt{u} \text{ est croissante sur I}$$

- La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et $]0\,;+\infty[$, et u est non nulle si u a un signe constant, on a alors :

$$\frac{1}{u(a)} < \frac{1}{u(b)} \qquad \text{la fonction } \frac{1}{u} \text{ est décroissante sur I}$$

Exemples :

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f puis les variations de la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{1-2x}$.

f est définie si, et seulement si : $1 - 2x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \dfrac{1}{2}$

L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = \left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$

Pour les variations, on décompose la fonction f en $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 1 - 2x$

La fonction u est une fonction affine de coefficient directeur $a = -\dfrac{1}{2} < 0$.
La fonction u est donc décroissante sur D_f.

Comme les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations, la fonction f est décroissante sur D_f

2) Déterminer les variations sur $]-3\,;+\infty[$ de g telle que : $g(x) = \dfrac{1}{x+3}$

On décompose la fonction g en $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = x + 3$.

La fonction u est une fonction affine qui est positive sur $]-3\,;+\infty[$ et croissante car de coefficient directeur $a = 1 > 0$.

Comme les fonctions u et $\dfrac{1}{u}$ ont des variations contraires, la fonction g est décroissante sur $]-3\,;+\infty[$

5.4 Exercices d'application

5.4.1 Encadrement d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathrm{I} = \left[\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}$

a) Déterminer les variations de f sur I

b) Donner un encadrement de la fonction f pour les valeurs de $x \in [3\,;\,7]$

a) On peut vérifier aisément que la fonction f existe bien sur l'intervalle I.

On décompose la fonction f en $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ et on pose $v = \sqrt{u}$.

On a donc : $u(x) = 2x - 5$.

- u est une fonction affine de coefficient directeur $a = 2 > 0$, donc la fonction u est croissante sur I.
- u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations donc la fonction v est croissante sur I.
- v et $\dfrac{1}{v}$ ont des variations contraires. La fonction $\dfrac{1}{v}$ est décroissante sur I.

De ces résultats, on en déduit que la fonction f est décroissante sur I

b) Comme la fonction f est décroissante, on en déduit que si $x \in [3\,;\,7]$:

$$f(7) \leqslant f(x) \leqslant f(3) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$$

Conclusion : si $x \in [3\,;\,7]$ alors $f(x) \in \left[\frac{1}{3}\,;\,1\right]$

5.4.2 Tableau de variation et courbe d'une fonction

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

a) Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$

b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

c) Vérifier ces variations en traçant $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f

a) On pose : $u(x) = x^2 - 2x + 3$. On cherche les racines de $u(x)$

$$\Delta = 4 - 12 = -8 \quad \Rightarrow \quad \Delta < 0 \quad \text{pas de racine}$$

$u(x)$ a donc un signe constant or $a = 1 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) > 0$

f est donc définie sur $\mathbb{R}$

b) On décompose la fonction f en $\sqrt{u}$.

- On cherche la forme canonique de $u(x)$

$$u(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 - 1 + 3 = (x-1)^2 + 2$$

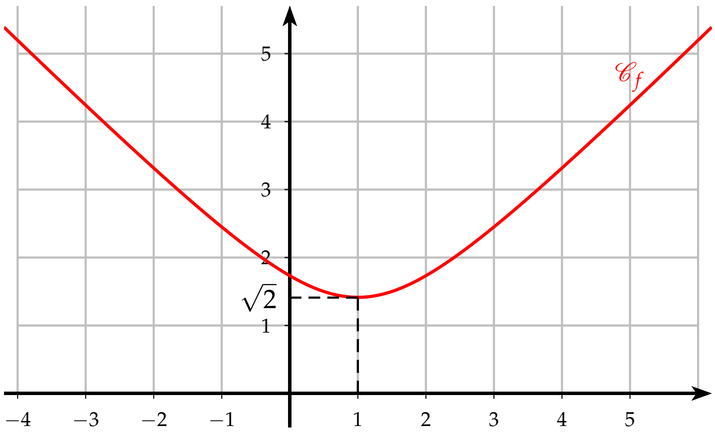
- On a alors les variations de u

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

- Comme u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations, on en déduit les variations de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

c) On rentre la fonction f dans une calculette ou sur un ordinateur, on obtient alors la courbe suivante :



Remarque : La courbe admet un axe de symétrie : $x = 1$.

5.4.3 Variation d'une fonction homographique

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$

a) Montrer qu'il existe des réels a et b tels que : $f(x) = a + \dfrac{b}{x+2}$

b) En déduire les variations de la fonction f sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f

a) On réduit la deuxième forme de f au même dénominateur puis on identifie à la première forme :

$$a + \frac{b}{x+2} = \frac{ax+2a+b}{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 - 2a = -1 \end{cases}$$

On a donc : $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x+2}$

b) On pose $\mathrm{I} =]-\infty\,;-2[$ et $\mathrm{J} =]-2\,;+\infty[$.

On décompose la fonction $f = 2 + v$ et $v = -\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = x + 2$

- u est une fonction affine avec $a = 1 > 0$ donc u est croissante sur I et J.
- u et $\dfrac{1}{u}$ ont des variations contraires donc $\dfrac{1}{u}$ est décroissante sur I et J
- v et $\dfrac{1}{u}$ ont des variations contraires ($\lambda = -1$). v est croissante sur I et J.
- v et $v + 2$ ont les mêmes variations donc $v + 2$ est croissante sur I et J

La fonction f est croissante sur I et J

c) On peut alors dresser le tableau de variation de la fonction f.
Pour les grandes valeurs de x, la fonction f se rapproche de 2.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2