Loi normale (Tale STMG)

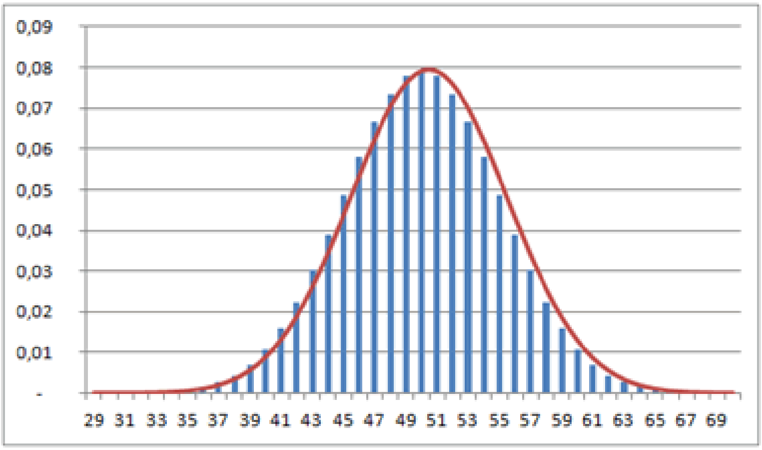
I Rappels : utilisation de la calculatrice pour la loi binomiale (vu en 1ère) :

TI	Casio
Pour calculer $P(X = k)$ 2nd VARS puis choisir binomFdp ou binompdf puis saisir n, p, k Pour calculer $P(X \leq k)$ Même procédure mais sélectionner binomFrèp ou binomcdf	Pour calculer $P(X = k)$ MENU, STAT, DIST, BINM (binomiale), Bpd, sélectionner VAR (variable) puis saisir k (affiche *x*), n (numtrial), et p. Pour calculer $P(X \leq k)$ Même procédure mais sélectionner Bcd

II loi normale :

1) Définition et courbe :

Le diagramme en bâtons d'une loi binomiale de paramètres n et p peut être approché par une courbe « en cloche » (quand n est grand et p pas trop voisin de 0 ou de 1).
Cette courbe en cloche définit une nouvelle loi de probabilités que l'on appelle loi normale.



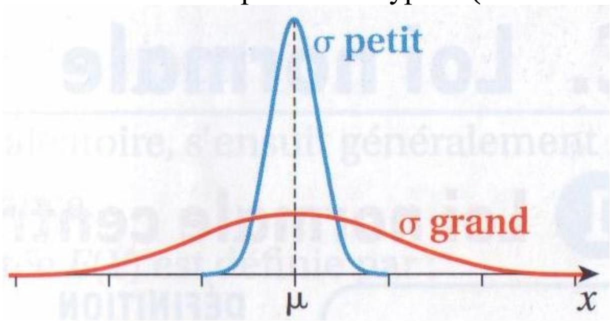
2) Paramètres de la loi normale :

La loi normale est caractérisée par deux paramètres :

- L'espérance, qui donne la valeur moyenne. Elle est notée μ (« mu »).
- L'écart type, qui donne la dispersion autour de la moyenne. Il est noté σ (« sigma »).

Remarques :
La courbe « en cloche » de paramètres μ et σ a les propriétés suivantes :

- elle est représentée par une fonction définie sur ☼ à valeurs strictement positives (la courbe est au dessus de l'axe des abscisses) ;
- elle est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \mu$ (la courbe est centrée sur la moyenne) ;
- l'aire totale de la surface située entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1 ;
- la forme de la cloche est influencée par l'écart type σ (voir schéma ci dessous).

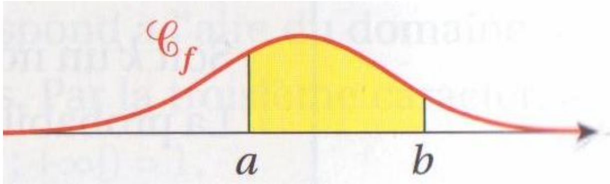


3) <u>Lien entre la courbe et les probabilités :</u>

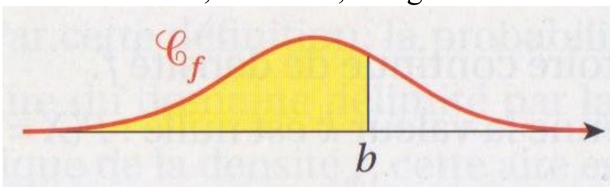
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ, notée $N(\mu , \sigma)$, alors :

- X est associé à la courbe en cloche de paramètres μ et σ ;

- La probabilité $p(a < X < b)$ (probabilité que X soit comprise entre deux valeurs a et b) est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe, et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$;



- La probabilité $p(X < b)$ (probabilité que X soit inférieur à b) est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe, et à gauche de la droite d'équation $x = b$;



- Par définitions : pour tout réel a : $p(X = a) = 0$ et $p(X < \mu) = p(X > \mu) = 0{,}5$.

4) <u>Loi normale et calculatrices :</u>

Tous les résultats se trouvent à l'aide de la calculatrice :

TI	**Casio**
<u>Pour calculer **P(a ≤ X ≤ b)**</u> 2nd VARS puis choisir normalFrep puis saisir a, b, μ, σ. <u>Pour calculer **P(X ≤ b)**</u> 2nd VARS puis choisir normalFrep puis saisir -10^99 (saisir –10000 est suffisant), b, μ, σ. <u>Pour calculer **P(X ≥ a)**</u> 2nd VARS puis choisir normalFrep puis saisir a, 10^99 (saisir 10000 est suffisant), μ, σ.	<u>Pour calculer **P(a ≤ X ≤ b)**</u> STAT, DIST, Norm, Ncd puis saisir : a (lower), b (upper), σ, μ (attention à l'ordre). <u>Pour calculer **P(X ≤ b)**</u> STAT, DIST, Norm, Ncd puis saisir : -10^99 (saisir –10000 est suffisant), b, σ, μ (attention à l'ordre). <u>Pour calculer **P(X ≥ a)**</u> STAT, DIST, Norm, Ncd puis saisir : a, 10^99 (saisir 10000 est suffisant), σ, μ (attention à l'ordre).

<u>Exemple :</u> On considère que X suit une loi normale de paramètres $\mu = 21$ et $\sigma = 7$:
$p(10 < X < 30) \approx 0{,}843$; $p(X < 40) \approx 0{,}997$; $p(X > 25) \approx 0{,}284$

5) <u>Intervalle de fluctuation :</u>

<u>Propriété :</u>
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ, alors on a :
$p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$.

<u>Définition :</u>
L'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$ est appelé intervalle de fluctuation de X au seuil de 95%.

III Echantillonnage et estimation :

1) Introduction :

On s'intéresse à un caractère dans une population donnée dont la proportion est supposée connue et est notée p (par exemple, on s'intéresse aux personnes qui souhaitent acheter un logement parmi les habitants d'une ville donnée).

En général, on étudie le caractère, non pas sur la population (ce qui est souvent impossible), mais sur des échantillons de taille n extraits de cette population.
On considère que ces échantillons sont constitués en prélevant successivement et sans remise n individus dans cette population.

2) Echantillonnage et prise de décision :

Dans ce paragraphe, on suppose que la proportion p du caractère étudié est connue.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de n individus de la population.
On note f la fréquence des individus de l'échantillon qui possèdent le caractère étudié.

Propriété :

Un intervalle de fluctuation à au moins 95% de la fréquence f est l'intervalle : $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ (cela signifie que la fréquence f observée dans l'échantillon appartient à cet intervalle dans au moins 95% des cas).

Prise de décision :

Il s'agit de décider si l'hypothèse « la proportion a pour valeur p » est acceptable ou non.

- si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, on accepte l'hypothèse faite sur la proportion p.

- si la fréquence observée f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, on rejette l'hypothèse faite sur la proportion p, avec un risque de 5% de se tromper.

3) Estimation :

Dans ce paragraphe, on suppose que la proportion p du caractère étudié est inconnue, et on souhaite l'estimer à partir d'un échantillon de n individus prélevé au hasard et avec remise.

Propriété :

L'intervalle de confiance au niveau 95% est défini par : $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ où f désigne la fréquence observée du caractère étudié sur un échantillon de taille n.
Cela signifie que la proportion p du caractère étudié sur la population appartient à cet intervalle dans au moins 95% des cas.