1ère **DM n°10 : Fonctions Usuelles - Correction** **Mars 2020**

Ex 1 : niveau (*)

Soit $f(x)=-x^3+2x^2-x-5$ avec $x\in[-2;3]$

$f'(x)=-3x^2+4x-1=-3(x-1)(x-\frac{1}{3})=(x-1)(-3x+1)$

$f'(x)=0$ donne $x-1=0$ ou $-3x+1=0$ donc $x=1$ ou $x=\frac{1}{3}$

on en déduit le tableau de variations de f

x	-2		1/3		1		3
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	13	↘	-5,15	↗	-5	↘	-17

On obtient ainsi :

- f admet un maximum local en $x=1$
- f admet un minimum local en $x=\frac{1}{3}$
- f admet un maximum global en $x=-2$
- f admet un minimum global en $x=3$

Ex 2 : niveau (**)

Soit $f(x)=\frac{2x^2-x-6}{x-1}$ avec $x\in[-4;6]$

f est définie si $x-1\neq0$ donc $D_f=[-4;1[\cup]1;6]$

$f'(x)=\frac{(4x-1)(x-1)-(2x^2-x-6)}{(x-1)^2}=\frac{4x^2-5x+1-2x^2+x+6}{(x-1)^2}$

$=\frac{2x^2-4x+7}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0$ donne $2x^2-4x+7=0$ donc $\Delta=-40<0$ donc f' n'admet pas de racine et $f'(x)$ est du signe du coeffcient dominant (de x^2)

donc $\forall x\neq1$: $f'(x)>0$

Autre méthode :

$2x^2-4x+7=2(x^2-2x)+7=2((x-1)^2-1)+7=2(x-1)^2+5>0$

donc $\forall x\neq1$: $f'(x)>0$

on en déduit le tableau de variations de f

x	-4		1		6
signe de f'		$+$	‖	$+$	
f	-6	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	12

On a : $2x+1-\frac{5}{x-1}=\frac{(2x+1)(x-1)-5}{x-1}=\frac{2x^2-x-1-5}{x-1}$

donc $f(x)=2x+1-\frac{5}{x-1}$ pour tout $x\neq1$

ainsi $f(x)-(2x+1)=\frac{-5}{x-1}$

on obtient le tableau de signes ci-dessous :

x	-4		1		6
-5		$-$		$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$f(x)-(x+1)$		$+$	‖	$-$	
Position relative de C_f et (d)		C_f est au-dessus de (d)	‖	C_f est en-dessous de (d)	

Ex 3 : niveau (***)

Soit $f(x)=\frac{3x^2-2x+1}{x^2+x+2}$ avec $x\in\mathbb{R}$

le discriminant du trinôme x^2+x+2 vaut $\Delta=-7<0$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+x+2>0$ (signe du coefficient de x^2) donc $D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=\frac{(6x-2)(x^2+x+2)-(3x^2-2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}$

$=\frac{6x^3+6x^2+12x-2x^2-2x-4-6x^3-3x^2+4x^2+2x-2x-1}{(x^2+x+2)^2}$

$=\frac{5x^2+10x-5}{(x^2+x+2)^2}=\frac{5(x^2+2x-1)}{(x^2+x+2)^2}$

$f'(x)=0$ donne $x^2+2x-1=0$ donc $\Delta=8$

ainsi $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{8}}{2}=-1-\sqrt{2}$ et $x_2=-1+\sqrt{2}$

le signe du trinôme x^2+2x-1 est positif à l'extérieur des racines x_1 et x_2
donc on déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	3	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	y_2	$\nearrow$	3

$$y_1=f(x_1)=f(-1-\sqrt{2})=\frac{16+10\sqrt{2}}{7}$$

$$y_2=f(x_2)=f(-1+\sqrt{2})=\frac{16-10\sqrt{2}}{7}$$

Ainsi on peut déduire que :

- f admet un maximum local & global en $x=-1-\sqrt{2}$
- f admet un minimum local & global en $x=-1+\sqrt{2}$
- La courbe C_f possède une asymptote horizontale $(d): y=3$

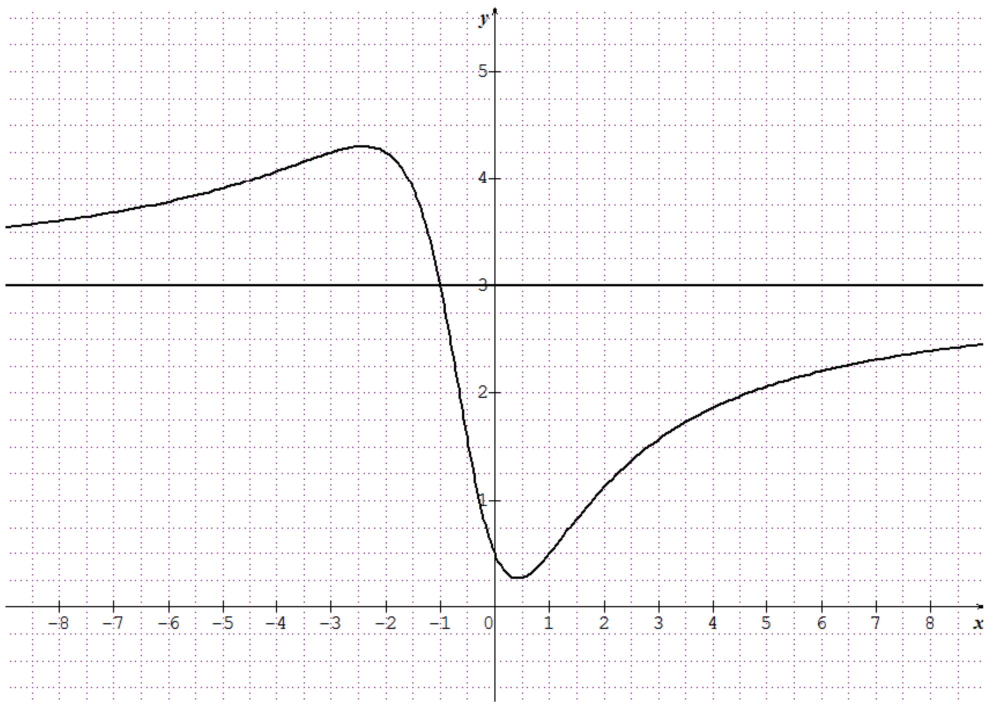
BONUS :

$$f(x)-3=\frac{3x^2-2x+1}{x^2+x+2}-3=\frac{3x^2-2x+1-3x^2-3x-6}{x^2+x+2}=\frac{-5x-5}{x^2+x+2}$$

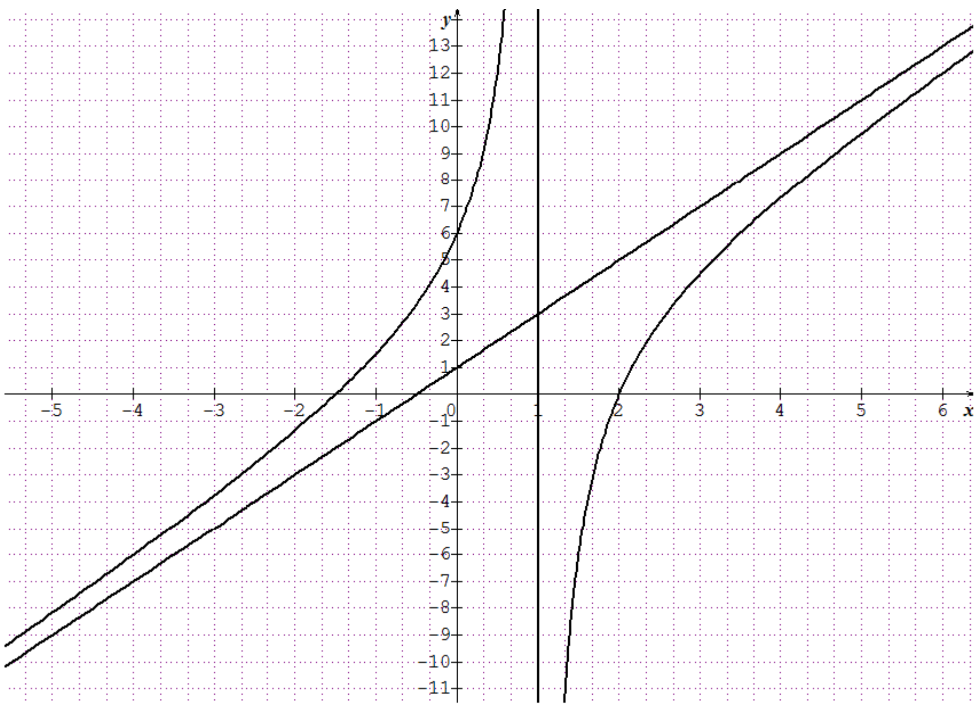
on obtient le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-5x-5$		$+$	0	$-$	
x^2+x+2		$+$		$+$	
$f(x)-3$		$+$	0	$-$	
Position relative de C_f et (d)		C_f est au-dessus de (d)		C_f est en-dessous de (d)	

De plus la courbe C_f coupe la droite (d) au point $A(-1\,;3)$



y
x
5
4
3
2
1
0
−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8



y
x
13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1 −2 −3 −4 −5 −6 −7 −8 −9 −10 −11
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6