

**Ex 1 : niveau (\*)**Résoudre les équations suivantes dans  $]-\pi; \pi]$  :

1) équation  $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  donc  $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

donc  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

donc  $x = \frac{\pi}{3}$  ou  $x = \frac{2\pi}{3}$  donc  $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$

2) équation  $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  donc  $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

donc  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  ou  $x = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$

donc  $x = \frac{\pi}{4}$  ou  $x = \frac{-\pi}{4}$  donc  $S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{-\pi}{4} \right\}$

3) équation  $\cos(x) = \frac{-1}{2}$  donc  $\cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

donc  $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi$

donc  $x = \frac{2\pi}{3}$  ou  $x = \frac{-2\pi}{3}$  donc  $S = \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{-2\pi}{3} \right\}$

4) équation  $\sin(x) = \frac{-1}{2}$  donc  $\sin(x) = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

donc  $x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$  ou  $x = \pi - \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$

donc  $x = \frac{-\pi}{6}$  ou  $x = \frac{7\pi}{6}$  donc  $S = \left\{ \frac{-\pi}{6}; \frac{-5\pi}{6} \right\}$  car  $\frac{7\pi}{6} \equiv \frac{-5\pi}{6} [2\pi]$

5) équation  $\sin(x) = \cos(x)$  donc  $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1$  donc  $\tan(x) = 1$

donc  $\tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$  donc  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

donc  $x = \frac{\pi}{4}$  ou  $x = \frac{-3\pi}{4}$  donc  $S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{-3\pi}{4} \right\}$  car  $\frac{\pi}{4} \equiv \frac{-3\pi}{4} [\pi]$

6) équation  $\tan(x) = \sqrt{3}$  donc  $\tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$  donc  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

donc  $x = \frac{\pi}{3}$  ou  $x = \frac{-2\pi}{3}$  donc  $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{-2\pi}{3} \right\}$  car  $\frac{\pi}{3} \equiv \frac{-2\pi}{3} [\pi]$

**Ex 2 : niveau (\*\*)**Résoudre les équations suivantes dans  $]-\pi; \pi]$  :

1) équation  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  donc  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

donc  $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

donc  $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$  ou  $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

donc  $x = \frac{\pi}{12}$  ou  $x = \frac{5\pi}{12}$  donc  $S = \left\{ \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12} \right\}$

2) équation  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  donc  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

donc  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  ou  $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$

donc  $x = \frac{-\pi}{24} + k\pi$  ou  $x = \frac{-7\pi}{24} + k\pi$

donc  $x = \frac{-\pi}{24}$  ou  $x = \frac{23\pi}{24}$  ou  $x = \frac{-7\pi}{24}$  ou  $x = \frac{17\pi}{24}$

donc  $S = \left\{ \frac{-\pi}{24}; \frac{23\pi}{24}; \frac{-7\pi}{24}; \frac{17\pi}{24} \right\}$

3) équation  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$  donc  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

donc  $3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  ou  $3x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

donc  $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$  ou  $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$

donc  $x = \frac{\pi}{9}$  ou  $x = \frac{7\pi}{9}$  ou  $x = \frac{-5\pi}{9}$  ou  $x = \frac{\pi}{3}$  ou  $x = \frac{-\pi}{3}$  ou  $x = \pi$

donc  $S = \left\{ \frac{\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}; \frac{-5\pi}{9}; \frac{\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}; \pi \right\}$

**Ex 3 : niveau (\*\*\*)**

Résoudre dans  $]-\pi; \pi]$  les équations suivantes :

1) équation  $\cos^2(x)=1$  donc  $\cos(x)=1$  ou  $\cos(x)=-1$

donc  $S=\{0; \pi\}$

2) équation  $2\sin^2(x)-1=0$  donc  $\sin^2(x)=\frac{1}{2}$

donc  $\sin(x)=\sqrt{\frac{1}{2}}$  ou  $\sin(x)=-\sqrt{\frac{1}{2}}$

donc  $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$  ou  $\sin(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc  $\sin(x)=\sin(\frac{\pi}{4})$  ou  $\sin(x)=\sin(\frac{-\pi}{4})$

donc  $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$  ou  $x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

ou  $x=\frac{-\pi}{4}+2k\pi$  ou  $x=\pi-\frac{-\pi}{4}+2k\pi$

donc  $x=\frac{\pi}{4}$  ou  $x=\frac{3\pi}{4}$  ou  $x=\frac{-\pi}{4}$  ou  $x=\frac{-3\pi}{4}$

donc  $S=\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{-\pi}{4}; \frac{-3\pi}{4}\}$

3) équation  $2\sin^2(x)+5\sin(x)-3=0$  on pose  $X=\sin(x)$

donc on obtient  $2X^2+5X-3=0$  donc  $(2X-1)(X+3)=0$

donc  $2X-1=0$  ou  $X=-3$  donc  $X=\frac{-1}{2}$  ou  $X=-3$

donc  $\sin(x)=\frac{1}{2}$  ou  $\sin(x)=-3$

donc  $x=\frac{\pi}{6}$  ou  $x=\frac{5\pi}{6}$  et  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$  donc  $\sin(x) \neq -3$

donc  $S=\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\}$

4) équation  $-2\cos^2(x)+3\cos(x)-1=0$  on pose  $X=\cos(x)$

donc on obtient  $-2X^2+3X-1=0$  donc  $(-2X+1)(X-1)=0$

donc  $-2X+1=0$  ou  $X-1=0$  donc  $X=\frac{1}{2}$  ou  $X=1$

donc  $\cos(x)=\frac{1}{2}$  ou  $\cos(x)=1$

donc  $x=\frac{\pi}{3}$  ou  $x=\frac{-\pi}{3}$  ou  $x=0$

donc  $S=\{\frac{-\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}\}$

5) équation  $-\sin^2(x)+2\cos(x)+2=0$

on sait que  $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$

donc on obtient  $-(1-\cos^2(x))+2\cos(x)+2=0$

soit  $\cos^2(x)+2\cos(x)+1=0$  donc  $(\cos(x)+1)^2=0$

donc  $\cos(x)+1=0$  donc  $\cos(x)=-1$

donc  $x=\pi$  et  $S=\{\pi\}$

6) équation  $\cos^2(x)=\sin^2(x)$

on sait que  $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$

donc on obtient  $\cos^2(x)=1-\cos^2(x)$  soit  $\cos^2(x)=\frac{1}{2}$

donc  $\cos(x)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$  ou  $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc  $x=\frac{3\pi}{4}$  ou  $x=\frac{-3\pi}{4}$  ou  $x=\frac{-\pi}{4}$  ou  $x=\frac{\pi}{4}$

donc  $S=\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{-\pi}{4}; \frac{-3\pi}{4}\}$

**Ex 3 : niveau (\*\*\*) - bis)**

Soit  $f(x) = \frac{4}{2 + \cos(x)}$  avec  $x \in [-2\pi; 2\pi]$

1) étude de la parité de  $f$  :

$$f(-x) = \frac{4}{2 + \cos(-x)} = \frac{4}{2 + \cos(x)} = f(x)$$

donc  $f$  est paire sur  $[-2\pi; 2\pi]$

2) étude de la périodicité de  $f$  :

$$f(x + 2\pi) = \frac{4}{2 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{4}{2 + \cos(x)} = f(x)$$

donc  $f$  est  $2\pi$ -périodique

calcul de la dérivée de  $f$  :

$$f'(x) = \frac{-4 \times (-\sin(x))}{(2 + \cos(x))^2} = \frac{4 \sin(x)}{(2 + \cos(x))^2}$$

3) calcul des valeurs critiques de  $f$  :

$$f'(x) = 0 \text{ donne } 4 \sin(x) = 0 \text{ donc } \sin(x) = 0$$

donc  $x = 0$  ou  $x = \pi$  ou  $x = -\pi$  ou  $x = 2\pi$  ou  $x = -2\pi$

4) le signe de  $f'(x)$  dépend directement du signe de  $\sin(x)$

d'après les données du COURS on obtient le tableau de variations de  $f$

$x$	$-2\pi$	$-\pi$	$0$	$\pi$	$2\pi$
signe de $f'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$-$
$f$	$4/3$	$4$	$4/3$	$4$	$4/3$

5) Les extrema de  $f$  :

- $f$  admet un minimum local (et global) en  $x = -2\pi, x = 0, x = 2\pi$
- $f$  admet un maximum local (et global) en  $x = -\pi, x = \pi$

6) Représentation graphique  $C_f$  :

