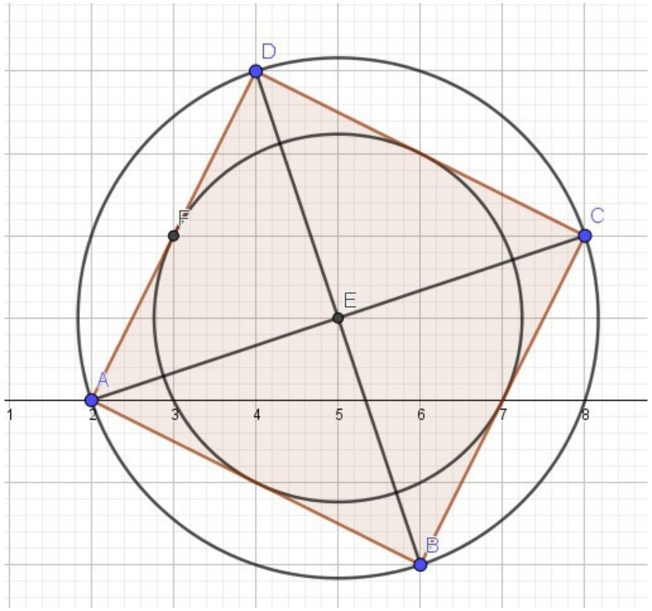
Ex 1 : (*) - 5 pts

$ABCD$ est un carré tel que $A(2;0)$ et $C(8;2)$ ainsi $B(6;-2)$ et $D(4;4)$ sont les 2 autres sommets du carré



En effet, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$AB=AD=DC=BC=2\sqrt{5}$

et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

donc $ABCD$ est bien un carré

le cercle (C) circonscrit à ABC a pour centre $E(5;1)$ et de rayon $r=EC=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

donc son équation réduite est : $(C):(x-5)^2+(y-1)^2=10$

le cercle (C') inscrit à ABC a pour centre $E(5;1)$ et de rayon $r'=EF=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ où $F(3;2)$ est le milieu de $[AD]$

donc son équation réduite est : $(C'):(x-5)^2+(y-1)^2=5$

On vérifie alors que les cercles (C) et (C') sont *concentriques*

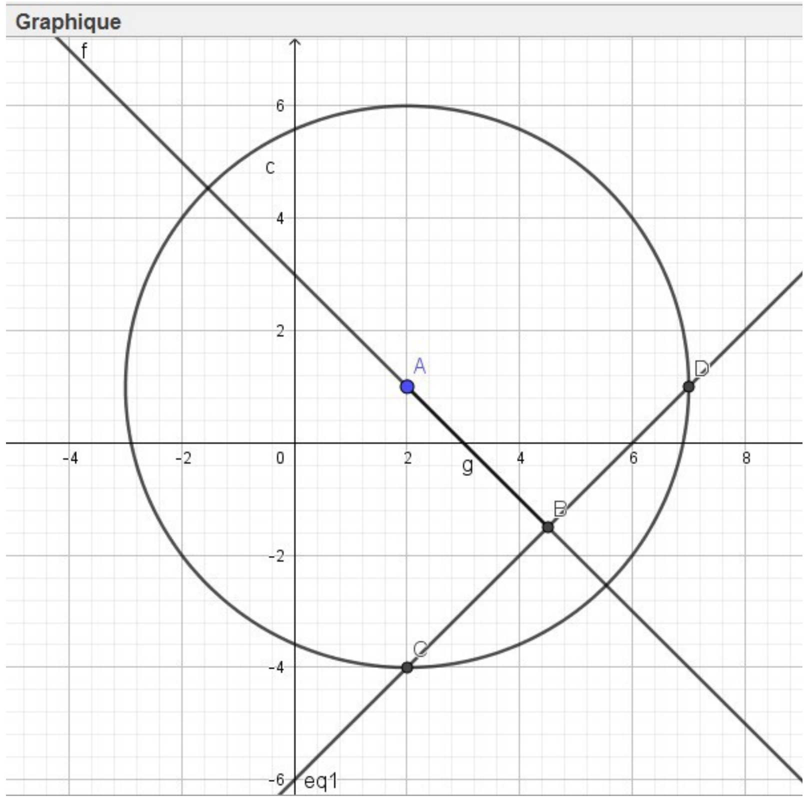
Ex 2 : (**) - 5 pts

On considère le cercle (C) de centre $A(2;1)$ et de rayon $r=5$ et la droite (d) d'équation cartésienne $-x+y+6=0$

la distance entre le point A et la droite (d) est :

$$\delta=\frac{|-x_M+y_M+6|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{|-2+1+6|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

ainsi $\delta<r$ donc on peut en déduire que la droite (d) et le cercle (C) possèdent 2 points d'intersection notés C et D



Le cercle (C) a pour équation réduite : $(x-2)^2+(y-1)^2=25$

La droite (d) a pour équation cartésienne $-x+y+6=0$

Donc les points C et D vérifient le système $\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=25\\-x+y+6=0\end{cases}$

donc $\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=25\\y=x-6\end{cases}$ donc $\begin{cases}(x-2)^2+(x-7)^2=25\\y=x-6\end{cases}$

donc $\begin{cases}2x^2-18x+28=0\\y=x-6\end{cases}$ donc $\begin{cases}x=2 \quad ou \quad x=7\\y=x-6\end{cases}$

donc on déduit que $(C)\cap(d)=\{C(2;-4);D(7;1)\}$
(voir graphique ci-dessus)

Ex 3 : (***) - 10 pts

Soit (P) la parabole d'équation $y=x^2$

Soit (C) le cercle d'équation $(x+5)^2+(y-8)^2=65$

Soit (C') le cercle d'équation $x^2+(y-10)^2=52$

les points d'intersection de (C) et (P) vérifient le système :

$$\begin{cases}(x+5)^2+(y-8)^2=65\\ y=x^2\end{cases} \text{ donc } \begin{cases}(x+5)^2+(x^2-8)^2=65\\ y=x^2\end{cases}$$

donc $\begin{cases}x^2+10x+25+x^4-16x^2+64=65\\ y=x^2\end{cases}$ donc $\begin{cases}x^4-15x^2+10x+24=0\\ y=x^2\end{cases}$

par ailleurs :

$$(x^2-5x+6)(x^2+5x+4)=x^4+5x^3+4x^2-5x^3-25x^2-20x+6x^2+30x+24$$
$$=x^4-15x^2+10x+24$$

donc les abscisses des points d'intersection de (C) et (P) vérifient l'équation $(x^2-5x+6)(x^2+5x+4)=0$ soit $(x-2)(x-3)(x+1)(x+4)=0$

donc les solutions sont $x=2$ ou $x=3$ ou $x=-1$ ou $x=-4$

Donc les points d'intersection de (C) et (P) sont :
$A(-1;1)$, $B(-4;16)$, $C(3;9)$ et $D(2;4)$

<u>Conjecture</u> : la somme des abscisses de ces points est nulle

les points d'intersection de (C') et (P) vérifient le système :

$$\begin{cases}x^2+(y-10)^2=52\\ y=x^2\end{cases} \text{ donc } \begin{cases}x^2+(x^2-10)^2=52\\ y=x^2\end{cases}$$

donc $\begin{cases}x^2+x^4-20x^2+100=52\\ y=x^2\end{cases}$ donc $\begin{cases}x^4-19x^2+48=0\\ y=x^2\end{cases}$

On pose alors $X=x^2$ donc l'équation $x^4-19x^2+48=0$ devient $X^2-19X+48=0$ on obtient $\Delta=169$ donc $X=3$ ou $X=4$

donc $x^2=4$ ou $x^2=3$ donc $x=-2$ ou $x=2$ ou $x=-\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{3}$

Donc les points d'intersection de (C) et (P) sont :
$A'(-2;4)$, $B'(2;4)$, $C'(-\sqrt{3};3)$ et $D'(\sqrt{3};3)$

<u>Conjecture</u> : la somme des abscisses de ces points est nulle

D'une manière générale si a, b, c, d sont les abscisses des points d'intersection entre un cercle (C) quelconque et la parabole (P) on vérifie que la somme des abscisses de ces 4 points est nulle

Preuve: $(x-\boldsymbol{a})(x-\boldsymbol{b})(x-\boldsymbol{c})(x-\boldsymbol{d})$

$$=(x^2-(a+b)x+ab)(x^2-(c+d)x+cd)$$
$$=x^4-(a+b)x^3+(ab)x^2-(c+d)x^3+(a+b)(c+d)x^2-(ab)(c+d)x+\ldots$$
$$\ldots+(cd)x^2-(a+b)(cd)x+abcd$$
$$=x^4-(\boldsymbol{a+b+c+d})x^3+(ab+ac+bc+ad+bd)x+\ldots$$
$$\ldots-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$$

or le coefficient du monôme x^3 est nul donc $\boldsymbol{S=a+b+c+d=0}$

graphique de la situation :