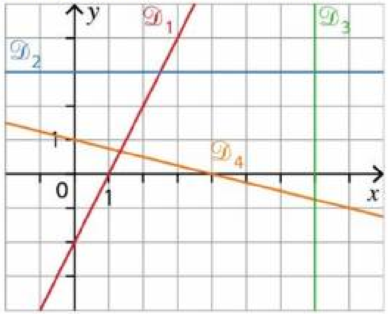
1 Calculer
Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathcal{D}$ si un vecteur directeur est :

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$

c. $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ **d.** $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{-2}{5}\end{pmatrix}$

3 Déduire du graphique ci-dessous les coordonnées d'un vecteur normal à chacune des quatre droites. Justifier.



On pourra également donner les coordonnées d'un vecteur-directeur à chacune des droites ci-dessus

4 Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathcal{D}$ dans chacun des cas suivants.

1. $\mathcal{D} : 4x - y + 8 = 0$
2. $\mathcal{D} : -2x + 5y - 3 = 0$
3. $\mathcal{D} : x - y = 0$
4. $\mathcal{D} : y = \frac{1}{3}x + 2$
5. $\mathcal{D} : y = -3$

5 Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite (AB) dans chacun des cas suivants.

1. $A(-3 ; 2)$ et $B(3 ; -2)$.
2. $A(0 ; -1)$ et $B(-3 ; -12)$.
3. $A(1 ; -3)$ et $B(3{,}23 ; -4{,}5)$.

8 Calculer
En utilisant les vecteurs normaux, déterminer dans chaque cas si les droites suivantes sont perpendiculaires.

1. $d : x - 3y + 8 = 0$ et $d' : 3x - y + 2 = 0$.
2. $d : 2x + y + 4 = 0$ et $d' : 4x - 8y - 3 = 0$.
3. $d : y = 3x$ et $d' : -3x - y + 5 = 0$.
4. $d : 2x - (1 + \sqrt{3})y - 5 = 0$ et $d' : x - (1 - \sqrt{3})y + 2 = 0$.

9 Déterminer, dans chacun des cas suivants, une équation cartésienne de la droite Δ qui passe par le point A et qui a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}$.

1. $A(-1 ; 2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\-9\end{pmatrix}$.
2. $A(10 ; -4)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$.
3. $A(5 ; -2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{-1}{4}\end{pmatrix}$.
4. $A(0 ; -7)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

10 Soient les points $B(4 ; -1)$ et $C(2 ; 8)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu du segment $[BC]$.
2. Soit Δ la droite d'équation $-3x + 2y - 5 = 0$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal de Δ.
3. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est-il colinéaire au vecteur $\vec{n}$?
4. Δ est-elle la médiatrice du segment $[BC]$?

11 Soient les points $A(8 ; -5)$, $B(-1 ; 1)$ et $C(-3 ; 4)$. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (BC). On souhaite déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

1. Calculer les coordonnées d'un vecteur directeur de (BC).
2. Que représente un vecteur directeur de (BC) pour la droite $\mathcal{D}$?
3. En déduire que $\mathcal{D}$ a une équation du type $-2x + 3y + c = 0$, où c est un réel.
4. Conclure en utilisant les coordonnées du point A.

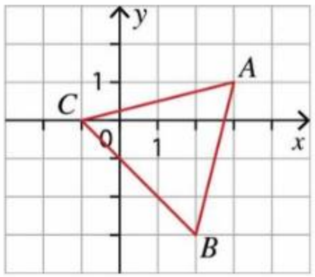
13 Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $-4x + 2y = 0$.
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $B(0\,;-2)$ et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $C(3\,;3)$ et parallèle à $\mathcal{D}$.

14 On considère la droite Δ qui passe par le point $A(2\,;-4)$ et qui est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $-x + 2y + 21 = 0$.
- Le point $E(-2\,;5)$ appartient-il à Δ ?

15 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Raisonner, calculer, représenter

Soient trois points $A(3\,;1)$, $B(2\,;-3)$ et $C(-1\,;0)$.
1. Déterminer une équation de la hauteur issue de A.
2. Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$.



3. Construire la figure sur un logiciel de géométrie dynamique et vérifier les résultats.

19 Soit Δ la droite d'équation $x - 2y + 1 = 0$. Soit H le point de coordonnées $(-1\,;0)$.
1. Vérifier que le point H appartient à la droite Δ.
2. Déterminer les coordonnées d'un point du plan dont H est le projeté orthogonal sur Δ.

20 Déterminer une équation de l'axe de symétrie de chacune des paraboles définies par les équations suivantes
- $y = 5x^2 - 3x + 1$
- $y = -x^2 - x$
- $y = 3x^2 + 9$
- $y = (x-2)(3x-1)$
- $y = \sqrt{2}x^2 - \sqrt{6}x + 1$

22 Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux paraboles d'équations :

$$\mathcal{P} : y = x^2 + 2x + 1$$
$$\text{et } \mathcal{P}' : y = -2x^2 + 4x - 3.$$

- Pour chacune de ces paraboles, déterminer les coordonnées de son sommet et en déduire le nombre de points d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses.

26 On considère une parabole $\mathcal{P}$ qui passe par les points $A(-2\,;4)$ et $B(3\,;4)$.
- Déterminer une équation de l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$.

27 On considère une parabole $\mathcal{P}$ qui passe par le point $A(3\,;-2)$ et dont une équation de l'axe de symétrie est $x = 7$.
- Déterminer les coordonnées d'un autre point de $\mathcal{P}$.

28 Déterminer les équations de deux paraboles distinctes qui admettent la droite d'équation $x = -3$ pour axe de symétrie.

33 On considère des cercles dont les équations sont données ci-dessous.
Pour chacun d'entre eux, déterminer les coordonnées de son centre et la valeur de son rayon.
1. $(x-2)^2+(y+1)^2=3$
2. $(x+3)^2+(y-2)^2=1$
3. $(x-\sqrt{2})^2+y^2=4$
4. $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=12$

35 Soit (E) l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'équation :
$$x^2-2x+y^2-4y-9=0.$$
1. Recopier et compléter les égalités suivantes.
a. $x^2-2x=(x-\ldots)^2-\ldots$
b. $y^2-4y=(y-\ldots)^2-\ldots$
2. En déduire que (E) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

37 Dans chacun des cas suivants, donner une équation du cercle de centre $A(x_A\,;y_A)$ et de rayon R.
1. $x_A=1$, $y_A=2$ et $R=5$.
2. $x_A=-3$, $y_A=0$ et $R=\frac{1}{2}$.
3. $x_A=\frac{2}{3}$, $y_A=\frac{1}{4}$ et $R=\frac{4}{5}$.
4. $x_A=\sqrt{2}$, $y_A=2\sqrt{3}$ et $R=\sqrt{2}$.

39 Dans chacun des cas suivants, donner une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
1. $A(-3\,;7)$ et $B(0\,;0)$.
2. $A(1\,;5)$ et $B(-3\,;-1)$.
3. $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

41 **Raisonner, représenter**
1. Déterminer une équation du cercle de centre $A(1\,;-3)$ et passant par l'origine du repère.
2. Déterminer une équation du cercle de centre $A(-2\,;1)$ et passant $B(0\,;-3)$.

43 Soient les droites d et d' d'équations respectives :
$$x+3y-1=0 \quad \text{et} \quad y=-\frac{1}{3}x+1.$$
Montrer que d et d' sont parallèles de trois façons :
a. avec des vecteurs directeurs ;
b. avec des vecteurs normaux ;
c. avec des équations réduites de droites.

44 On considère les points $B(3\,;2)$ et $C(-2\,;8)$.
Soit Δ la droite d'équation:
$$x-y+3=0.$$
• Δ est-elle la médiatrice du segment $[BC]$? Justifier.

45 Soient $D(0\,;4)$ et $D'(-3\,;2)$ deux points du plan.
Soit Δ la droite d'équation :
$$2x-y=0.$$
• Le point D' est-il le symétrique de D par rapport à la droite Δ ? Justifier.

46 **Raisonner, représenter**

Déterminer une équation du cercle :

a. de centre $C(4\,;2)$ et tangent à l'axe des ordonnées ;

b. de centre $D(-1\,;1)$ et tangent à l'axe des abscisses.

47 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Représenter, calculer

On considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation :

$x^2+2x+y^2-2y-7=0$.

1. Le cercle $\mathscr{C}$ coupe la droite d'équation $x=1$ en deux points A et B.

Calculer les coordonnées de ces deux points.

2. Le cercle $\mathscr{C}$ coupe la droite d'équation $y=2$ en deux points C et D.

Calculer les coordonnées de ces deux points.

3. Sur un logiciel de géométrie dynamique, tracer le cercle $\mathscr{C}$ et placer les points A, B, C et D. Vérifier les résultats obtenus aux questions **1** et **2**.

49 **Calculer**

Les équations ci-dessous sont celles de cercles. Pour chacun d'eux, déterminer les coordonnées de son centre et son rayon.

1. $x^2-6x+9+y^2=25$

2. $x^2+2x+y^2-2y+2=16$

3. $x^2-10x+y^2+20y+125=121$

4. $x^2+4x+y^2-8y=-16$

50 Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur Δ dans chacun des cas suivants.

1. $\Delta : x=1$ et $A(3\,;1)$.

2. $\Delta : y=-2$ et $A(3\,;4)$.

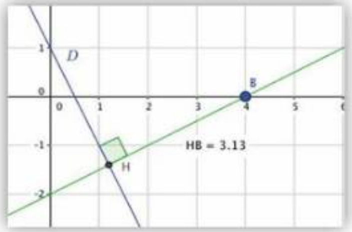
3. $\Delta : x+y-2=0$ et $A(-1\,;2)$.

4. $\Delta : 3x-5y+2=0$ et $A(1\,;1)$.

52 **Chercher, communiquer**

On souhaite déterminer la distance du point $B(4\,;0)$ à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $2x+y-1=0$.

1. Pour conjecturer cette distance, Kylian a réalisé les tracés suivants sur un logiciel de géométrie dynamique.



a. Détailler les étapes du protocole de construction de Kylian.

b. La valeur affichée est-elle bien celle de la distance cherchée ?

2. En suivant le protocole de construction établi précédemment, retrouver la valeur exacte de cette distance par le calcul.

53 On considère les points $A(-2\,;1)$ et $B(4\,;-1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

2. On considère le point $C(3\,;2)$.

C appartient-il à la droite (AB) ?

3. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à (AB).

4. On appelle H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). HC est la distance de C à la droite (AB).

Expliquer pourquoi il existe un réel $k\neq 0$ tel que $\overrightarrow{CH}=k\vec{n}$.

5. Calculer $\overrightarrow{CH}\cdot\vec{n}$ de deux manières différentes et en déduire la distance CH du point C à la droite (AB).

55 On considère le système d'équations à deux inconnues suivant.

$$\begin{cases} 5x+\frac{2}{3}y-1=0 \\ -\frac{3}{2}x-\frac{1}{5}y+4=0 \end{cases}$$

On nomme $\mathscr{D}_1$ la droite d'équation $5x+\frac{2}{3}y-1=0$ et $\mathscr{D}_2$ celle d'équation $-\frac{3}{2}x-\frac{1}{5}y+4=0$.

1. Déterminer un vecteur normal de chacune de ces deux droites.

2. En déduire leur position relative et discuter du nombre possible de solutions du système précédent.

3. Quel est l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de ce système ?

56 **1.** Déterminer le nombre de solutions du système d'équations à deux inconnues suivant.

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$$

2. Quel est l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de ce système ?

57 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Soient $A(0\,;0)$, $B\,(5\,;6)$ et $C\,(-1\,;5)$ trois points du plan.

1. Justifier qu'une équation cartésienne de la hauteur issue de C est $5x+6y-25=0$.

2. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de B.

3. En déduire les coordonnées de l'orthocentre (c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs) du triangle ABC.

4. Vérifier ces résultats en réalisant une figure sur un logiciel de géométrie dynamique.

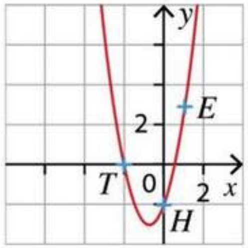
59 Soit a un réel fixé. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+y+1=0$, le point B de coordonnées $(3\,;0)$ et le point A de coordonnées $(a\,;a)$.

1. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$.

2. Les coordonnées de H dépendent-elles de a ?

3. Pour quelle(s) valeur(s) de a le triangle ABH est-il isocèle en H ?

60 On considère la parabole tracée ci-dessous, qui passe par les points T, H et E dont les coordonnées sont respectivement $(-2\,;0)$, $(0\,;-2)$ et $(1\,;3)$.



1. Déterminer une équation cartésienne de cette parabole.

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses qui a une abscisse positive :

a. en résolvant une équation du second degré ;

b. en calculant les coordonnées du symétrique de T par rapport à l'axe de symétrie de la parabole.

61 Déterminer une équation cartésienne de la parabole passant par le point $A(1\,;2)$ et de sommet $S(0\,;4)$.

62 Déterminer une équation cartésienne de la parabole passant par le point $B\,(0\,;4)$ et de sommet $(1{,}5\,;6{,}25)$.

63 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

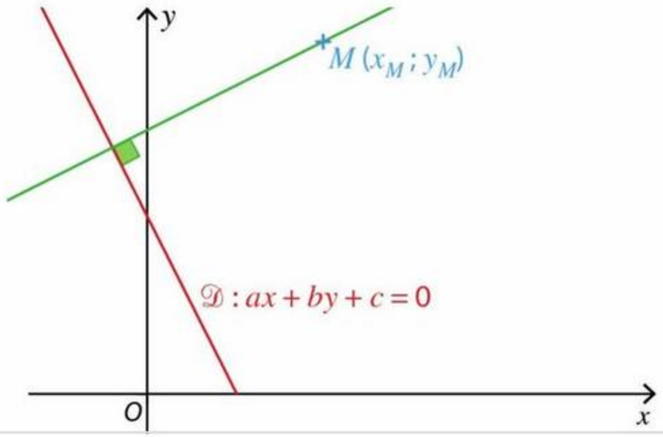
Soient A et B les points du plan dont les coordonnées respectives sont $(1 ; -1)$ et $(2 ; 3)$.
Soit d la droite d'équation $y = 3$.

1. Réaliser une figure sur un logiciel de géométrie dynamique.
2. Tracer le cercle Γ passant par les points A et B, dont le centre C se trouve sur la droite d.
3. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
4. En déduire les coordonnées du point C puis une équation du cercle Γ.
5. Vérifiez les résultats obtenus sur le logiciel de géométrie dynamique.

64 ALGO

On considère une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et un point $M\,(x_M ; y_M)$.

• Écrire un algorithme en language naturel qui donne une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par M.



On écrira ce programme en <u>langage PYTHON</u>

68 **Chercher, calculer**

On considère une droite d d'équation :

$$2x - y - \frac{1}{2} = 0.$$

On veut déterminer une équation de la droite symétrique de l'axe (Ox) par rapport à d.

1. Déterminer les coordonnées du point A, point d'intersection de d et de l'axe (Ox).
2. Soit B le point de l'axe (Ox) d'abscisse 1.
Quelle est l'ordonnée de B ?
3. Déterminer les coordonnées du point B', symétrique de B par rapport à d.
4. Déduire des questions précédentes l'équation de la droite Δ symétrique de l'axe (Ox) par rapport à la droite d.

70 Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ passant par le point $A\,(1 ; 2)$ et tangent à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x + y = 7$.

72 **Chercher, raisonner, communiquer**

Soient $A\,(-1 ; 2)$, $B\,(1 ; -4)$ et $C\,(3 ; 0)$ trois points du plan.

1. Justifier que ces trois points ne sont pas alignés.
2. Tracer dans un repère du plan, un cercle passant par les trois points A, B et C. Détailler le protocole de construction.

75 ALGO

Représenter, calculer

Soit A un point du plan et $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R.

• Écrire un algorithme en langage naturel qui renvoie la distance entre le point A et le point de $\mathscr{C}$ le plus proche de A, en fonction des coordonnées du point A, celles du centre O du cercle ainsi que la valeur du rayon R.

76 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Représenter, calculer, communiquer

Soient $F(-2\,;2)$ un point, $\mathscr{C}$ le cercle de centre F et de rayon 2,5 unités de longueur et $\mathscr{D}$ la droite d'équation :

$$x + 2y = 0.$$

On veut déterminer les équations des tangentes au cercle $\mathscr{C}$ parallèles à $\mathscr{D}$ si elles existent.

1. a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, placer le point F, tracer le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$.

b. Tracer les potentielles tangentes Δ et Δ' au cercle $\mathscr{C}$ et parallèles à $\mathscr{D}$.

c. Détailler le protocole de construction.

2. a. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

b. Déterminer une équation cartésienne de la droite d perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par F.

c. Calculer les coordonnées des deux points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite d.

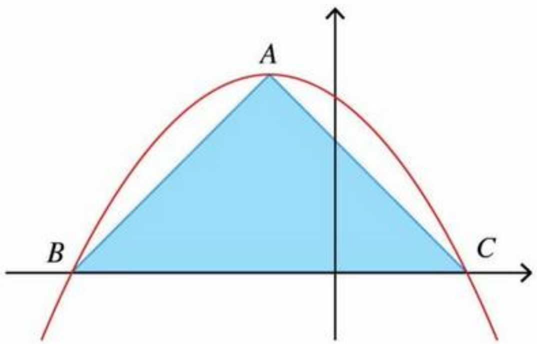
d. En déduire les équations cartésiennes de Δ et Δ'.

e. Vérifier la conformité des résultats avec l'affichage obtenu sur le logiciel de géométrie dynamique.

78 On considère la parabole d'équation :

$$y = -\frac{1}{2}(x+3)(x-2)\,.$$

On note A son sommet, B et C ses points d'intersection avec l'axe des abscisses, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. Combien vaut l'aire de ce triangle ?

79 PRISE D'INITIATIVE

Soit m un nombre réel.

On considère la parabole d'équation $y = mx^2 - 2x + 4$ et la droite d'équation $y = 2m$.

• Discuter, suivant les valeurs de m, du nombre de points d'intersection entre la droite et la parabole.

80 LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE **Lieu géométrique**

On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ et le point $A(0\,;1)$. Une droite $\mathscr{D}_m$ de coefficient directeur m passe par le point A et coupe la parabole $\mathscr{P}$ en deux points que l'on nomme B et C. Soit I le milieu de $[BC]$.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, tracer la parabole et placer le point $A(0\,;1)$. Définir un curseur m et tracer la droite $\mathscr{D}_m$. Utiliser le mode *Trace* et conjecturer à quel ensemble le point I semble appartenir lorsque les points B et C varient.

2. a. Montrer que les abscisses des points B et C vérifient l'équation $x^2 - mx - 1=0$.

b. Combien de solutions cette équation admet-elle ?

3. Exprimer les coordonnées du point I en fonction des solutions de l'équation précédente. En déduire que les coordonnées du point I vérifient l'équation $y = 2x^2 + 1$.

4. Réciproquement, justifier que, lorsque m décrit l'ensemble des réels, le point I décrit toute la courbe d'équation $y = 2x^2 + 1$.

5. Conclure sur la conjecture émise à la question **1**.

82 **Représenter, chercher, raisonner**

Soient $A\,(-1\,;\,2)$ et $B\,(5\,;\,4)$ deux points. On s'intéresse à l'ensemble des cercles passant par A et B.

1. Dans un repère du plan, placer A et B puis tracer un cercle passant par A et B.

2. Quel est l'ensemble L des centres des cercles passant par A et B ?

3. Donner une équation cartésienne de cet ensemble L.

4. Soit S un point qui appartient à l'ensemble L. Soit s l'abscisse du point S.
Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre S passant par A et B.

5. Tracer alors trois cercles différents passant par A et B. Pour chacun de ces cercles, donner les coordonnées du centre et le rayon.

84 On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $-3x + 2y - 1 = 0$ et la droite Δ d'équation $y = 3x - 1$.

• Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}'$ symétrique de la droite $\mathscr{D}$ par rapport à la droite Δ.

85 Soient $A\,(-5\,;\,6)$, $B\,(11\,;\,2)$ et $C\,(-3\,;\,-1)$ trois points du plan.

• Déterminer une équation cartésienne du cercle passant par ces trois points.

90 L'objectif de cet exercice est de déterminer une équation de la parabole $\mathscr{P}$ qui passe par les points $A(1\,;\,-1)$, $B(-1\,;\,9)$ et $C(3\,;\,5)$.

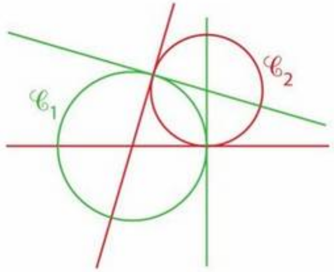
1. $y = ax^2 + bx + c$ est une équation de $\mathscr{P}$, avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$. Établir que les points A, B et C appartiennent à $\mathscr{P}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ a - b + c = 9 \quad (*) \\ 9a + 3b + c = 5 \end{cases}$$

Résoudre ce système d'abord à l'aide du *solveur* de la calculatrice puis par un calcul formel

86 On considère deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$\text{et } x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0.$$



1. Déterminer le centre et le rayon de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_2$.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_2$.

3. Justifier la position relative des tangentes à chacun des deux cercles en ces deux points.

89 Tracer les ensembles de points dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient les inégalités ou systèmes d'inégalités et égalités suivants.

1. $(x-3)^2 + (y+2)^2 \leqslant 16$

2. $\begin{cases} (x+1)^2 + (y-5)^2 \leqslant 9 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} (x-5)^2 + (y+1)^2 \leqslant 64 \\ y = x^2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} (x-5)^2 + (y+1)^2 \leqslant 25 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$

91 On considère les points $I\,(1\,;\,2)$ et $J\,(3\,;\,0)$.

• Démontrer que l'ensemble des points $M\,(x\,;\,y)$ du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MJ} + 3\overrightarrow{MI}$ sont orthogonaux est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.