1 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée sur le domaine indiqué.

1. $f(x) = 3\exp(x) - 2x + 1$ sur $D_f = \mathbb{R}$.

2. $g(x) = (2x^2 + 1)\exp(x)$ sur $D_g = \mathbb{R}$.

3. $h(x) = \dfrac{2+\exp(x)}{6+2x}$ sur $D_h = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$.

2 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = x\mathrm{e}^x + 3x - 1$

2. $g(x) = (x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^x$

3. $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x}$

8 Simplifier l'écriture de chacun des nombres suivants, où x désigne un nombre réel.

$A = \mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-4x}$ $\quad B = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^{2x})^2}$

$C = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^{-x})^6}$ $\quad D = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^{-x})^6} \times \mathrm{e}^{3x}$

$E = \dfrac{\mathrm{e}^{3-2x} \times (\mathrm{e}^x)^5}{\mathrm{e}^{x-2}}$

9 Simplifier l'écriture de chacun des nombres suivants, où x désigne un nombre réel.

$A = (\mathrm{e}^x)^5 \times \mathrm{e}^{-x}$ $\quad B = \dfrac{\mathrm{e}^{2x-5}}{\mathrm{e}^{2x-7}}$

$C = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{(\mathrm{e}^x)^6 \times \mathrm{e}}$ $\quad D = \dfrac{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{2x-1}}{2\mathrm{e}^{-x-2}}$

14 On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 0$ par :

$$u_n = \mathrm{e}^{2-\frac{n}{3}}.$$

1. Calculer ses premiers termes de u_0 à u_3 puis conjecturer son sens de variation.

2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

3. La conjecture précédente est-elle validée ? Justifier.

15 Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5\mathrm{e}^{-4x}$.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x+1)\mathrm{e}^{3x}$.

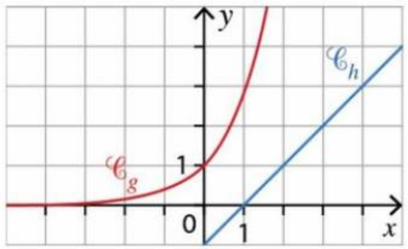
17 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 - \mathrm{e}^x.$$

1. Déterminer l'expression de la fonction f', dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f admet un maximum dont on précisera la valeur.

3. On a représenté ci-dessous les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x$ et $h(x) = x - 1$.



Conjecturer la position relative des courbes représentant les fonctions g et h.

Justifier cette conjecture à l'aide du résultat obtenu à la question **2**.

18 ALGO

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - e^{-2x}.$$

1. On note f' la dérivée de f.
Calculer $f'(x)$.

2. Étudier les variations de la fonction f.

3. a. En utilisant un graphique, expliquer pourquoi on peut conjecturer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0 ; 1]$ et donner une approximation de α au centième près.

b. On considère l'algorithme suivant donné en langage naturel.

```
a ← 0
F ← a – exp(–2a)
Tant que F < 0
    a ← a + 0,01
    F ← a – exp(–2a)
Afficher a
```

Quelle est la valeur affichée par cet algorithme à la fin de son exécution ? Expliquer.

37 **Calculer**

En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre les équations suivantes.

1. $e^{2x} \times e^{-3x} = 1$

2. $(e^{6x})^{-6} = 0$

3. $e^{2x-1} \times e^{2x+3} = 1$

4. $(e^{2x-1})^{-2} - 1 = 0$

22 En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre les inéquations suivantes.

1. $e^{x} \geqslant 1$ **2.** $e^{x-2} < 1$

3. $e^{2x+1} \geqslant 0$ **4.** $e^{x-1} - 1 \leqslant 0$

23 En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre les inéquations suivantes.

1. $e^{x} \geqslant e^{2x+1}$ **2.** $e^{-3x-2} < e^{-x}$

3. $e^{-2x-3} < e^{2x+4}$ **4.** $e^{-3x-1} - e^{x+5} \leqslant 0$

25 **Calculer**

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)e^{x}$.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-3x - 1)e^{x}$.

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^{x}$.

4. p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)e^{x}$.

26 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 5)e^{-x}$.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4x + 2)e^{2x}$.

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (3x - \frac{1}{2})e^{-2x}$.

4. p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \left(-\frac{5}{2}x + 4\right)e^{\frac{1}{2}x}$.

27 **Calculer**

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes

1. f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$.

2. g définie sur $]1 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{(x-1)}e^{x}$.

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2 + x + 3)e^{x+1}$.

4. p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = (x^2 - 1)e^{x}$.

29 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-t} + 1$.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^{2t+3}$.

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = e^{-t+4}$.

4. p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(t) = e^{\frac{1}{2}t}$.

30 Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 4)e^{-x}$.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3x - 2)e^{-2x}$.

3. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left(3x - \dfrac{3}{2}\right)e^{-3x}$.

4. p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = (-5x + 4)e^{\frac{1}{3}x+2}$.

31 ALGO

Raisonner

On injecte 4 mg d'un médicament dans le sang d'un patient, à l'instant $t = 0$. On note $Q(t)$ la quantité en mg de médicament présente dans le sang du patient à l'instant t exprimé en heure.

La vitesse d'élimination du médicament étant proportionnelle à la quantité présente dans le sang, on admet que la fonction Q vérifie la relation :

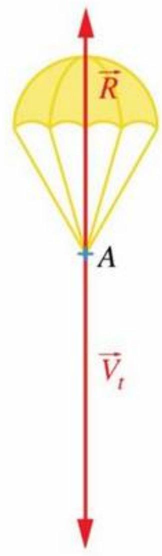
$$(E) : Q'(t) = -0{,}248\, Q(t).$$

1. Montrer que la fonction $Q(t) = 4e^{-0{,}248t}$ vérifie la relation (E) ainsi que la condition initiale $Q(0) = 4$.
2. Calculer la quantité de médicament présente dans le sang au bout de deux heures.
3. Montrer que la quantité de médicament décroît au cours du temps.
4. À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction Q.
5. On considère que le médicament est éliminé quand sa quantité dans le sang est inférieure à 0,01 mg.
À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps (arrondi au dixième d'heure) ce médicament est éliminé.
6. Écrire une fonction en Python qui permet de retrouver le résultat de la question 5.

32 Lorsqu'un parachutiste effectue un saut, sa vitesse de chute $V(t)$, exprimée en $m \cdot s^{-1}$, est une fonction du temps t, exprimé en seconde (s). $V(t)$ est la norme du vecteur vitesse $\vec{V_t}$.

La résistance de l'air est un vecteur noté $\vec{R}$ tel que $\vec{R} = -k\vec{V_t}$ où k est un réel strictement positif.

On admet que la vitesse $V(t)$ est donnée par la relation $V(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \dfrac{mg}{k}$, où k est la constante de résistance de l'air (en $kg \cdot s^{-1}$), m est la masse du parachutiste (en kg), $g = 10\ m \cdot s^{-2}$ et C est une constante (en $m \cdot s^{-1}$) dépendant des conditions initiales.

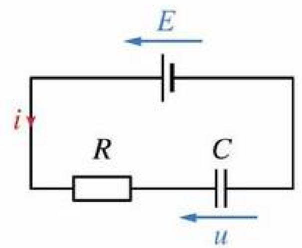


1. Exprimer $V(t)$ en fonction de t et de C pour un parachutiste dont la masse est 80 kg et tel que $k = 25\ kg \cdot s^{-1}$.
2. Déterminer la constante C sachant que la vitesse initiale du parachutiste était nulle.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction V.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction V à la calculatrice.

35 **Représenter**

On étudie la charge d'un condensateur et, pour cela, on dispose du circuit électrique ci-dessous composé de :

- une source de tension continue E de 10 V (volt) ;
- un conducteur ohmique de résistance $R = 10^5\ \Omega$ (ohm) ;
- un condensateur de capacité C de 10^{-6} F (farad).



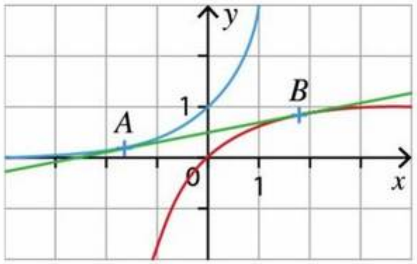
Si le condensateur est totalement déchargé à l'instant initial $t = 0$, la tension aux bornes du condensateur est donnée en fonction du temps t exprimé en s (seconde) par l'expression :

$$u(t) = E - Ee^{\frac{-t}{RC}}.$$

On appelle T le temps de charge en seconde pour que $u(t)$ soit égal à 95 % de E.

1. Représenter graphiquement la tension aux bornes du condensateur sur l'intervalle [0 ; 2].
2. Déterminer graphiquement le temps de charge T.

33 On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par $f(x) = e^x$ et $g(x) = 1 - e^{-x}$.
On a tracé dans un repère orthonormé, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.

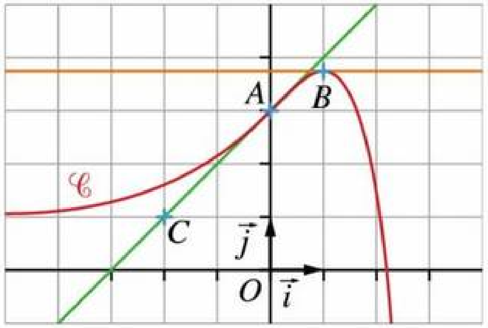


Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes dont on admettra l'existence.
On note D l'une de ces deux tangentes communes.
Cette droite est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
2. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point B.
3. En déduire que $b = -a$.

41 **Chercher, communiquer**

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite (AC) est tangente à $\mathscr{C}$ en $A(0 ; 3)$.
$\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale en B.



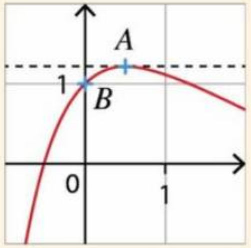
1. Déterminer graphiquement les valeurs respectives de $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(1)$, où f' est la dérivée de la fonction f.
2. On admet que f est définie, pour tout x réel, par :
$$f(x) = (ax + b)e^x + c.$$
a. Démontrer que, pour tout x réel, on a :
$$f'(x) = (ax + a + b)e^x.$$
b. Justifier que les réels a, b et c vérifient les égalités suivantes.
$b + c = 3 \qquad a + b = 1 \qquad 2a + b = 0$
c. En déduire les valeurs de a, b et c.

45 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 3xe^{-2x+1}.$$

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f.
2. Que peut-on conjecturer sur les valeurs de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes ?
3. Écrire un algorithme qui détermine le plus petit entier strictement positif n tel que $f(n) < 10^{-5}$.

46 PRISE D'INITIATIVE

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux réels.
On connaît la courbe représentative de la fonction f représentée ci-dessous.



Les points A et B appartiennent à la courbe représentative de f. $B\,(0\,;\,1)$ et A est le point de la courbe de f en lequel la tangente est horizontale. On a, de plus, $x_A = \frac{1}{2}$.

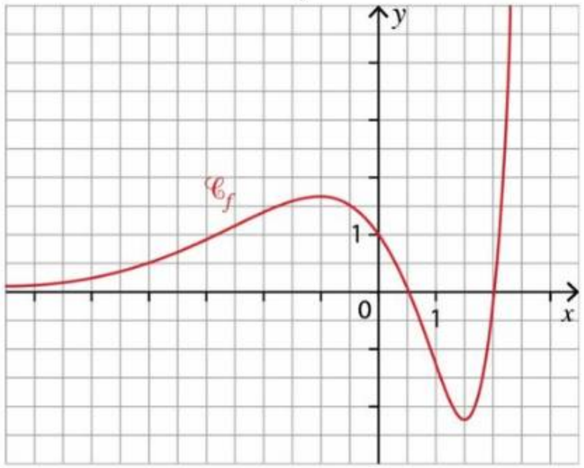
- Déterminer les valeurs de a et b.

47 CALCULATRICE ALGO

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 2{,}5x + 1)\mathrm{e}^x.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. On note f' la fonction dérivée de f.
a. Calculer $f'(x)$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur son domaine de définition.
c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -1 recoupe la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M.
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de l'abscisse de M (expliquer la démarche).
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0.

55 QCM

1. Pour tout réel x, le nombre $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ est égal à :
(a) 1 (b) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x}$ (c) $(1 - \mathrm{e}^{-2x})\mathrm{e}^x$

2. La fonction f est définie pour tout réel t par :

$$f(t) = (2t + 4)\mathrm{e}^{-2t}.$$

La dérivée de la fonction f a pour expression :
(a) $f'(t) = -4\mathrm{e}^{-2t}$ (b) $f'(t) = (-4t - 6)\mathrm{e}^{-2t}$
(c) $f'(t) = (-4t + 6)\mathrm{e}^{-2t}$

3. La courbe représentative de la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = x\mathrm{e}^x$ admet une tangente au point d'abscisse 1 d'équation réduite :
(a) $y = 2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}$ (b) $y = 2\mathrm{e}x - \mathrm{e}$ (c) $y = 2x - \mathrm{e}$

4. L'équation $\mathrm{e}^{3x+1} = 1$ a pour ensemble de solutions :
(a) $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ (b) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ (c) $S = \{0\}$

5. L'inéquation $\mathrm{e}^{-2x+4} \leqslant 1$ a pour ensemble de solutions :
(a) $[2\,;+\infty[$ (b) $]2\,;+\infty[$ (c) $]-\infty\,;2]$

59 CALCULATRICE

Soit g, A et f les fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1,$$

$$A(x) = \frac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

$$\text{et } f(x) = \frac{4}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

Partie 1

1. Étudier les variations de la fonction g.

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée au centième près du réel α, solution de l'équation $g(x) = 0$ puis dresser le tableau de signes de la fonction g.

3. Montrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

Partie 2

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;+\infty[$.

Partie 3

PRISE D'INITIATIVE

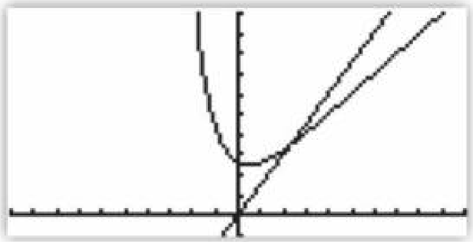
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point M d'abscisse α.

58 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par :

$$f(x) = x + 1 + \mathrm{e}^{-x+0,5}.$$

On a représenté ci-dessous, sur la calculatrice :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la droite Δ d'équation $y = 1,5x$.



1. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;5]$ $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}$.

Résoudre dans l'intervalle $[0\,;5]$ l'inéquation $f'(x) > 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur l'intervalle $[0\,;5]$.

2. On note α l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ.

a. Donner par lecture graphique un encadrement de α à 0,5 près.

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 1,5x$.

3. Une entreprise fabrique des cartes à puces électroniques à l'aide d'une machine.

La fonction f, définie plus haut, représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimé en centaine de cartes et $f(x)$ en centaine d'euros.

Déduire des questions précédentes le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.

4. Chaque carte fabriquée par la machine est vendue 1,50 €. La recette perçue pour la vente de x centaine(s) de cartes vaut donc $1,5x$ centaine d'euros.

Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaine d'euros, par la vente de x centaine(s) de cartes est donné par :

$$B(x) = 0,5x - 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}.$$

5. Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;5]$.

6. Montrer que, sur l'intervalle $[0\,;5]$, l'équation :

$$B(x) = 0$$

admet une solution unique, puis donner un encadrement au centième de cette solution.

En déduire quel doit être le nombre minimal de cartes commandées pour que l'entreprise puisse réaliser un bénéfice.