Automatismes et calculs

Compétence Calculer

12 Résoudre les équations suivantes.

1. $x^2-121=0$
2. $(x+1)(x^2-5)=0$
3. $x^2+x-2=0$
4. $x^2=2x+3$

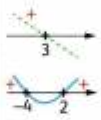
13 Résoudre les équations suivantes.

1. $\dfrac{9-4x}{x+1}=0$
2. $\dfrac{2x+1}{x}=4$
3. $\dfrac{x^2-1}{3x+2}=1-x$
4. $x^3=2x^2+x$

14 On souhaite connaître le signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-2x+6}{x^2+2x-8}$.

1. Rappeler la règle des signes d'une fonction affine, ainsi que celle d'un polynôme du second degré.
2. Recopier et compléter le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$ $\quad -4$	2	3 $\quad +\infty$	
$-2x+6$				
x^2+2x-8				
$f(x)$				



15 Étudier le signe des fonctions suivantes.

1. $f(x)=-2x+4$
2. $g(x)=3x+1$
3. $h(x)=2x(x-1)$
4. $i(x)=(3-x)(4x+1)$
5. $j(x)=-x^2-x+2$
6. $k(x)=-3x^2+13x+10$

16 Indiquer les expressions dont l'étude du signe est évidente et ne nécessite aucun calcul.

1. x^2+8 pour $x\in\mathbb{R}$.
2. $x-5$ pour $x\in[0;5]$.
3. $3x+4$ pour $x\in[-5;5]$.
4. $\dfrac{1}{(9-x)^2}$ pour $x\in\,]-\infty;9[$.

17 Étudier le signe des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

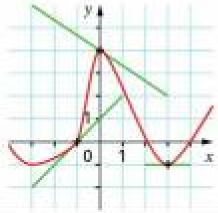
1. $l(x)=\dfrac{x^2-9}{x}$
2. $m(x)=\dfrac{x^2-5x}{(x-1)^2}$
3. $n(x)=\dfrac{10-x^2+3x}{x-1}$
4. $o(x)=\dfrac{x^3+3x^2}{2x-3}$

18 Pour chacune des fonctions suivantes, calculer l'image $f(a)$ et le nombre dérivé $f'(a)$ en a.

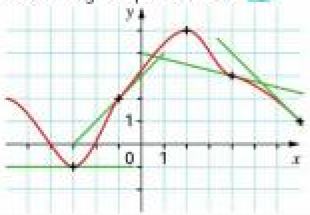
1. $f(x)=x$ avec $a=-2$
2. $f(x)=x^3$ avec $a=5$
3. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ avec $a=-3$
4. $f(x)=\sqrt{x}$ avec $a=25$

19 On a représenté ci-après la courbe d'une fonction f dérivable ainsi que certaines de ses tangentes. Pour chacune des tangentes, lire graphiquement :

1. l'abscisse a du point de tangence ;
2. la valeur de $f(a)$ et celle de $f'(a)$;
3. l'équation réduite de cette tangente.



20 Mêmes consignes que l'exercice **19**.



21 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x^2+3x-1$$

1. Soit h un réel non nul. Justifier que :
$$f(2+h)=2h^2+11h+13$$
2. En déduire que le taux d'accroissement de f entre 2 et $(2+h)$ est égal à :
$$\tau(h)=11+2h$$
3. f est-elle dérivable en 2 ? Si oui, préciser la valeur de $f'(2)$.
4. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

22 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-2x+1$. À l'aide d'une calculatrice, on a calculé le nombre dérivé de g en 3.

NumWorks

```
diff(x^3-2·x+1,3)
                    diff(1-2·x+x^3,3) = 25
```

En admettant ce résultat, déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 3.

23 Vrai ou Faux ?

Soit f une fonction dérivable en -1 et vérifiant $f(-1)=3$ et $f'(-1)=2$.

On note $\mathscr{T}$ la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse -1.

1. La tangente $\mathscr{T}$ passe par le point $A(-1;2)$.
2. La tangente $\mathscr{T}$ a pour coefficient directeur 2.
3. La tangente $\mathscr{T}$ a pour équation $y=2x+1$.

Pour les exercices 38 à 41, déterminer, pour chacune des fonctions f, l'expression de sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I indiqué.

38

1. $f(x)=(x^2+2)\sqrt{x}$ avec $\mathrm{I}=\,]0;+\infty[$.
2. $f(t)=\dfrac{1}{2t^2+4}$ avec $\mathrm{I}=\mathbb{R}$.
3. $f(x)=\dfrac{4}{2x^3-x^2}$ avec $\mathrm{I}=\,]1;+\infty[$.
4. $f(x)=\dfrac{4x-1}{3x^2+2x+1}$ avec $\mathrm{I}=[0;+\infty[$.

39

1. $f(x)=2x^3\sqrt{x}$ avec $\mathrm{I}=\,]0;+\infty[$.
2. $f(x)=(x-1)(x^2+3x-1)$ avec $\mathrm{I}=\mathbb{R}$.
3. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-3}$ avec $\mathrm{I}=\,]-\infty;3[$.
4. $f(t)=\dfrac{3t^2-1}{\sqrt{t}}$ avec $\mathrm{I}=\,]0;+\infty[$.

40

1. $f(t)=(3t+1)^5$ avec $\mathrm{I}=\mathbb{R}$
2. $f(x)=\sqrt{3x+1}$ avec $\mathrm{I}=\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$
3. $f(x)=-3(5-4x)^5$ avec $\mathrm{I}=\mathbb{R}$
4. $f(x)=\sqrt{4-2x}$ avec $\mathrm{I}=\,]-\infty;2[$

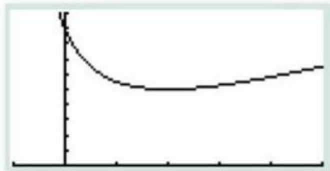
41

1. $f(t)=2t(t+1)^{10}$ avec $\mathrm{I}=\mathbb{R}$
2. $f(x)=(x+1)\sqrt{3x+1}$ avec $\mathrm{I}=\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.
3. $f(x)=\dfrac{6}{(2x-4)^{10}}$ avec $\mathrm{I}=\,]2;+\infty[$
4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{6-2x}}{x}$ avec $\mathrm{I}=\,]0;3[$

49 On donne ci-contre la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2+x+9}{x+1}$$

Casio



1. Conjecturer la nature et la valeur de l'extremum de la fonction f sur l'intervalle I.
2. a. Déterminer l'expression de la fonction $f'(x)$ sur I.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur I.
   c. En déduire le tableau de variations de f sur I. Ce résultat conforte-t-il la conjecture établie dans la question 1. ?

52 Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I. Préciser les extremums de la fonction.

1. $f(x) = 4x - 1$ sur $\mathrm{I} = [-2\,;1]$
2. $g(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $\mathrm{I} = [-4\,;-1]$
3. $h(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 1}{x - 2}$ sur $\mathrm{I} = [3\,;9]$
4. $j(x) = x^3 - 48x$ sur $\mathrm{I} = [-7\,;9]$
5. $k(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2}$ sur $\mathrm{I} = [-8\,;-4]$

55 Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces. Le montant des charges correspondant à la fabrication de x pièces, exprimé en euro, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;25]$ par :

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 100$$

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière. Chaque pièce est vendue au prix de 247 euros.

1. Quelle est la recette (sommes totales perçues) pour x pièces vendues ?
2. On note B la fonction bénéfice, exprimée en euro. On rappelle que le bénéfice est égal à la différence entre la recette et les charges.
Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;25]$:
$$B(x) = -x^3 + 30x^2 - 153x - 100$$
3. Calculer $B'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;25]$.
4. Étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;25]$ puis en déduire le tableau de variations de la fonction B.
5. Combien l'entreprise doit-elle produire de pièces quotidiennement pour réaliser un bénéfice maximal ?

70 **Application immédiate**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 a pour équation $y = -3x$.
2. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la factorisation $f(x) - (-3x) = (x+1)^3$.
3. En déduire l'étude des positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ avec la tangente $\mathscr{T}$.

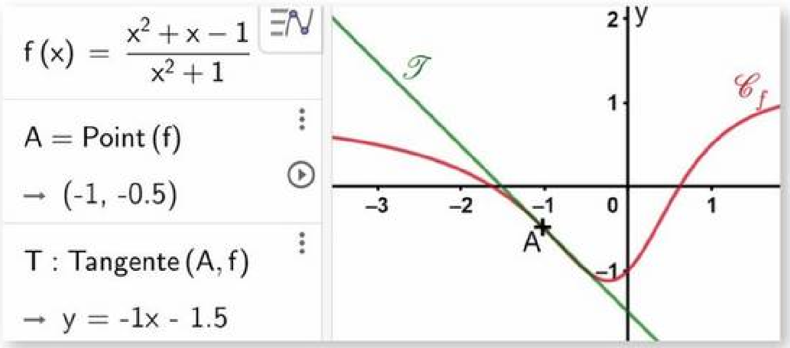
73 **Position relative d'une courbe et d'une tangente**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Confirmer par le calcul l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ obtenue grâce à un logiciel de géométrie dynamique :



2. a. Justifier que, pour tout réel x, on a :
$$f(x) - \left(-x - \frac{3}{2}\right) = \frac{(x+1)^2(2x+1)}{2x^2 + 2}$$
b. Étudier le signe de ce quotient puis interpréter cette étude de signes en termes de positions relatives.

75 **Exercice guidé**

Courbe sous contraintes

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des constantes réelles. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. On souhaite déterminer les valeurs de a, b et c de sorte que :

① $\mathscr{C}_f$ admette une tangente horizontale au point d'abscisse -3 ;

② $\mathscr{C}_f$ admette la droite d'équation $y=4x+5$ pour tangente au point d'abscisse -1.

1. a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x, a, b et c.

b. D'après la contrainte ①, quelle doit être la valeur de $f'(-3)$?

c. D'après la contrainte ②, justifier que $f'(-1)=4$ et que $f(-1)=1$.

2. a. En déduire que trouver a, b et c revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -6a+b=0 \\ -2a+b=4 \\ a-b+c=1 \end{cases}$$

b. Résoudre ce système et en déduire l'expression de $f(x)$.

Pistes de résolution

1. b. $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -3.

1. c. La contrainte ② donne deux informations. La première concernant le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -1 et la seconde une information sur le point de tangence A : en utilisant l'équation de cette tangente, déterminer les coordonnées de A.

2. Pour résoudre le système, on pourra dans un premier temps déterminer les valeurs de a et b à l'aide des deux premières équations, puis déduire la

76 **Courbe sous contrainte**

On considère la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

où a, b et c sont trois constantes réelles.

Cette courbe passe par le point $A(3;2)$, admet en ce point une tangente horizontale et au point d'abscisse 2 une tangente parallèle à la droite d'équation $y=3x+2$.

1. À partir des contraintes imposées sur la courbe $\mathscr{C}$, préciser les valeurs de $f(3)$, $f'(3)$ et $f'(2)$.

2. Justifier que a, b et c satisfont le système :

$$\begin{cases} 3a+b+\dfrac{c}{2}=2 \\ a-\dfrac{c}{4}=0 \\ a-c=3 \end{cases}$$

3. En déduire les valeurs de a, b et c et l'expression de f.

77 **À propos de tangente commune**

On considère les fonctions f et g définies sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=2x\sqrt{x}-3x$ et $g(x)=\frac{1}{16}x^3$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les coordonnées de leurs points d'intersection.

2. Justifier que ces courbes admettent une tangente commune en l'un de ces points.

Aide

1. Une fois les deux courbes tracées dans la fenêtre graphique, on utilise les fonctions suivantes, afin de déterminer numériquement les coordonnées (approchées) des points d'intersection des deux courbes.

Casio : Shift G.SLV puis ISCT

TI : 5:intersect du menu CALC

NumWorks : Calculer puis Intersection

79 Exercice guidé

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = \frac{1+x}{3x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 + 2$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. On considère $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_1'$ les tangentes respectives à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ aux points d'abscisses 1.

Tracer une figure à l'aide d'un logiciel ou de la calculatrice. Que peut-on dire de la position relative des droites $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_1'$? Le démontrer.

2. a. Conjecturer une généralisation de ce résultat.

b. Démontrer cette conjecture.

Pistes de résolution

1. En repère orthonormé, deux droites non parallèles aux axes sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs vaut –1.

2. a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, puis construire un curseur a et les deux tangentes $\mathscr{T}_a$ et $\mathscr{T}'_a$ aux courbes respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ aux points d'abscisse a. Explorer la situation en faisant varier la valeur de a.

2. b. Les tangentes $\mathscr{T}_a$ et $\mathscr{T}'_a$ ont pour coefficient directeur respectif $f'(a)$ et $g'(a)$.

86 Optimisation d'un bénéfice

Une entreprise produit des tablettes tactiles avec un maximum de production de 30 000 unités par mois. Soit x le nombre de millier de tablettes produites.

Le coût de production en millier d'euros est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;30]$ par :

$$C(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 22x^2 + 96x$$

Chaque tablette est vendue 480 euros et on suppose que l'entreprise écoule toute sa production mensuelle.

1. On note $R(x)$ la recette en millier d'euros pour x tablettes vendues. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

2. Montrer que le bénéfice de l'entreprise sera alors donné par la fonction B définie sur $[0\,;30]$ par :

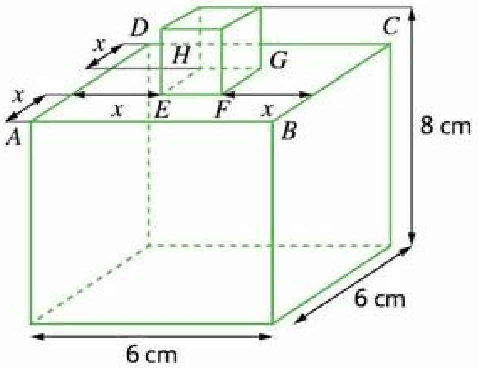
$$B(x) = \frac{1}{3}x^3 - 22x^2 + 384x$$

3. Tracer la courbe de B à l'écran de la calculatrice et conjecturer la production à réaliser pour obtenir le bénéfice maximal et la valeur de ce bénéfice.

4. Établir le tableau de variations de B sur $[0\,;30]$.

5. Donner la production à réaliser pour obtenir le bénéfice maximal et préciser la valeur de ce bénéfice.

89 Un designer a conçu un flacon pour un parfum composé d'un parallélépipède rectangle de base carrée surmonté d'un cube comme le montre la figure ci-dessous.



Le cube de base $EFGH$ est placé au centre du carré supérieur $ABCD$. On note x la distance entre les côtés du carré de base $EFGH$ du cube et les côtés du carré $ABCD$. Le flacon a une hauteur totale de 8 cm et les côtés du carré $ABCD$ mesurent 6 cm. On admettra que l'on a $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Partie A.

1. Démontrer que le volume du petit cube est :

$$U(x) = -8x^3 + 72x^2 - 216x + 216$$

2. En déduire que le volume total du flacon est égal à :

$$V(x) = -8x^3 + 72x^2 - 144x + 288$$

Partie B.

Soit f la fonction définie sur $[0;3]$ par :

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 36$$

1. Étudier les variations de f sur $[0;3]$.

2. En déduire le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0;3]$ et la valeur de x correspondante.

Partie C.

Vérifier que le volume total du flacon vérifie $V(x) = 8f(x)$ pour tout réel x de $[0;3]$. À l'aide des résultats de la **partie B.**, déterminer la valeur, en cm^3 arrondie à l'unité, du volume minimal de ce flacon.

90 **Variations d'une fonction et étude des positions relatives de deux courbes**

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathrm{I} = [-2;2]$ par :

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 1 \text{ et } g(x) = x + 2$$

On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère. Soit d la fonction définie sur I par $d(x) = f(x) - g(x)$.

1. Déterminer l'expression de $d(x)$ en fonction de x, puis calculer sa dérivée.

2. Étudier les variations de d sur I.

3. a. Préciser $d(1)$ et déterminer le signe de $d(x)$ sur I.

b. En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Vérifier ce résultat à l'aide de la calculatrice.

92 **« Distance » entre deux courbes**

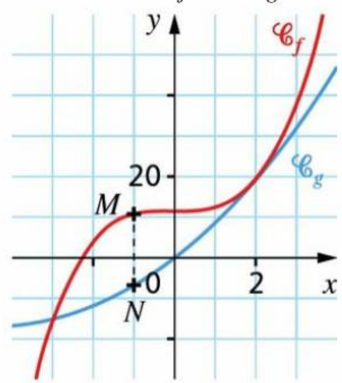
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 12$ et $g(x) = x^2 + 8x$, et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.

1. a. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) - g(x) = (x+3)(x-2)^2$$

b. Étudier alors les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. On considère les points M et N de même abscisse $x \in [-3;2]$, M (resp. N) appartenant à $\mathscr{C}_f$ (resp. à $\mathscr{C}_g$) comme l'illustre la figure ci-contre.



Quelle est la distance maximale MN lorsque x décrit l'intervalle $[-3;2]$? Justifier.

98 PYTHON

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction polynôme P définie pour tout réel x par $P(x)=2x^3-3x^2-1$.

1. Étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$.

2. a. Calculer $P(1)$ et $P(2)$. On peut alors en déduire et on l'admet ici que l'équation $P(x)=0$ admet une unique solution réelle α et que cette solution appartient à l'intervalle $]1;2[$.

b. On considère la fonction `encadrement` suivante. Cette fonction retourne un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Langage naturel

Fonction encadrement() :
  $x \leftarrow 1$
  Tant que $P(x)<0$ Faire
    $x \leftarrow x+0{,}1$
  Fin Tant que
  Retourner $x-0{,}1$ et x
Fin Fonction

Python

```
def P(x):
    return 2*x**3-3*x**2-1

def encadrement():
    x=1
    while P(x)<0:
        x=x+0.1
    return x-0.1,x
```

Quelles valeurs retourne cette fonction lorsqu'on l'exécute ?

c. Modifier cette fonction afin qu'elle :

① prenne en argument un entier naturel $n \geqslant 1$;

② retourne en sortie un encadrement de α d'amplitude 10^{-n}.

3. Dresser le tableau de signes de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Dresser le tableau de signes de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B. Étude d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel $x>-1$:

$$f'(x)=\frac{P(x)}{(1+x^3)^2}$$

où P est la fonction étudiée dans la **partie A.**

2. En utilisant le résultat de la question **A.3.**, étudier les variations de la fonction f sur $]-1;+\infty[$.

Partie C. Positions relatives

1. Déterminer une équation de la droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

2. Étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et T sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

100 PRISE D'INITIATIVES On considère la fonction h définie sur $[-10;10]$ par $h(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^2+1}$. Montrer que la fonction h est bornée sur l'intervalle $[-10;10]$.

Info

Une fonction f est dite **bornée** sur un intervalle I, s'il existe deux constantes réelles m et M telles que :

pour tout réel x de I, $m \leqslant f(x) \leqslant M$