13 VRAI OU FAUX

Chercher, raisonner

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme de leurs carrés.
2. Si $x = 2$, alors $x^2 = 4$.
3. Si $x^2 = 4$, alors $x = 2$.
4. Si $-4 < x < -1$, alors $1 < x^2 < 16$.
5. Si $1 < x^2 < 16$, alors $-4 < x < -1$.
6. Si $-2 \leqslant x \leqslant 2$, alors $x^2 \leqslant 4$.
7. Si $x \in [-1\,;2]$, alors $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$.

23 Résoudre les équations suivantes. On donnera les valeurs exactes.

a. $x^2 = 6$ b. $x^2 = -3$ c. $x^2 = \frac{1}{2}$

d. $x^2 = 8$ e. $x^2 = 81$ f. $x^2 = 144$

24 Résoudre les équations suivantes. On donnera les valeurs exactes.

a. $x^2 + 1 = 5$ b. $x^2 + 3 = -2$

c. $2x^2 - 18 = 0$ d. $3x^2 + 1 = 10$

25 Résoudre les équations suivantes. On donnera les valeurs exactes.

a. $3x^2 - 5 = x^2 - 1$ b. $-2x^2 + 6 = 3x^2$

c. $\frac{x^2 - 2}{5} = 1$ d. $\frac{4x^2 - 1}{3} = 5$

35 Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalle.

1. $x^2 \leqslant 9$ 2. $x^2 > 4$
3. $x^2 \geqslant 16$ 4. $x^2 < -2$

36 Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalle.

1. $2x^2 - 3 \leqslant 6$ 2. $-x^2 + 4 < 2$
3. $-7x^2 + 5 \leqslant 2x^2 - 11$ 4. $-5x^2 + 10 > x^2 - 8$

37 Résoudre les inéquations suivantes. On donnera l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalle.

a. $(2x+3)(x-4) < 0$

b. $(-3x+6)(x-2) \leqslant 0$

c. $(2x+8)(x+4) > 0$

38 Factoriser les expressions suivantes puis résoudre les inéquations. On donnera l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalle.

a. $x(2x+1) + x(3x-4) \leqslant 0$

b. $(2x+1)(x-3) + (2x+1)(3x+4) < 0$

c. $4x^2 - (x+1)^2 \geqslant 0$

47 Résoudre les équations suivantes.

1. $2x^2 + 3 = -x^2 + 4$ 2. $(x+2)^2 = 2x^2 + 4x$
3. $(x-3)(x+3) = 20$ 4. $4(x^2+1) = 15$

48 Résoudre les équations suivantes.

1. $x^3 + x = 0$ 2. $2x^3 - 3x = 0$
3. $4x^3 + 2(x-3) = -6$

49 À l'aide d'un tableau de signes, résoudre algébriquement sur $\mathbb{R}$ les inéquations après avoir factorisé.

1. $x^2 + 9x \geqslant 0$ 2. $-x^2 + 2x < 0$
3. $(x-2)^2 \geqslant 81$

50 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $x^2 - 1 < 0$ 2. $3x^2 \geqslant 2$
3. $-x^2 - 4 > -2x^2 + 5$ 4. $\frac{x^2 - 4}{2} > 3$

51 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $(x+1)(x-3) \leqslant (x+1)(4x+3)$
2. $x^2 < x(-4x+3)$
3. $x^2 - 9 \geqslant (x+3)(3x-2)$
4. $25x^2 - 1 > (10x-2)(2x+1)$

53 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $2x^2 - 7 \leqslant 0$
2. $-3x^2 + 9 < 0$
3. $5(x^2 - 2) + 4 \geqslant 3$
4. $8 - (6 - x^2) < 1$

62 Soit n un entier naturel.

1. Développer $(10n + 3)^2$.
2. Quel est le chiffre des unités du carré d'un entier qui se termine par 3 ?

63 **Modéliser**

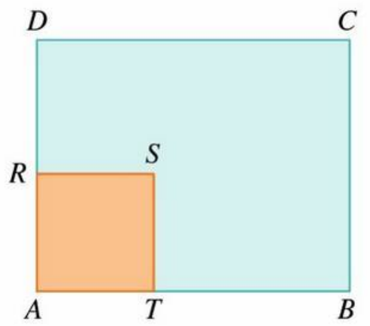
En augmentant la longueur du côté d'un carré de 5 cm, on augmente son aire de 21 %.

• Quelle est la longueur initiale du côté du carré ?

64 **Modéliser**

$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 4$ cm et $AB = 5$ cm.

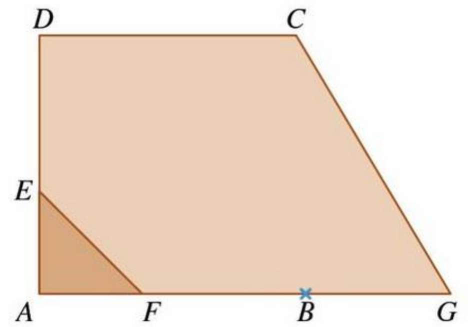
Étant donné un point R du segment $[AD]$, on construit le carré $ATSR$.



1. Où doit-on placer le point R pour que l'aire du carré $ATSR$ soit inférieure au quart de l'aire du rectangle $ABCD$?
2. Où doit-on placer le point R pour que l'aire du carré $ATSR$ soit supérieure à 20 % de l'aire du rectangle $ABCD$?

69 **Modéliser**

$ABCD$ est un carré de côté 4 cm. Soit G un point de la demi-droite $[AB)$ avec $BG = 3$ cm. Soit F un point du segment $[AB]$ et E un point du segment $[AD]$ tels que le triangle AEF soit rectangle isocèle en A.



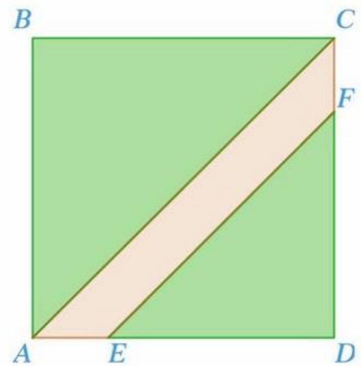
• Où doit-on placer le point F pour que l'aire du triangle AEF soit égale au quart de l'aire du trapèze $AGCD$?

72 **L'allée du jardin**

Modéliser

Un jardin carré de 20 m de côté est représenté par le carré $ABCD$.

$ACFE$ est une allée délimitée par les segments parallèles $[AC]$ et $[EF]$.



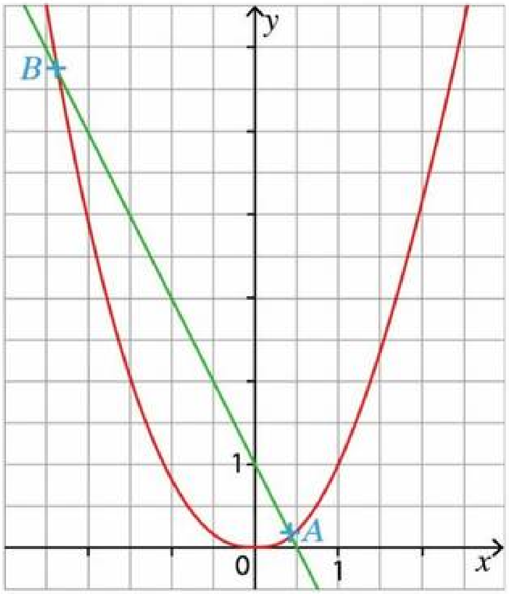
• Où doit-on placer le point E sur le segment $[AD]$ pour que l'allée ait une aire égale au quart de celle du jardin ?

70 On veut résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$x^2 = -2x + 1.$$

1. On a tracé dans un repère orthonormé la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = -2x + 1$.

Conjecturer le nombre de solutions de l'équation et une valeur approchée des solutions.



2. a. Prouver que, pour tout nombre réel, on a :

$$x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2.$$

b. Résoudre alors l'équation $x^2 = -2x + 1$.

74 **Raisonner**

Soit n un nombre entier naturel.

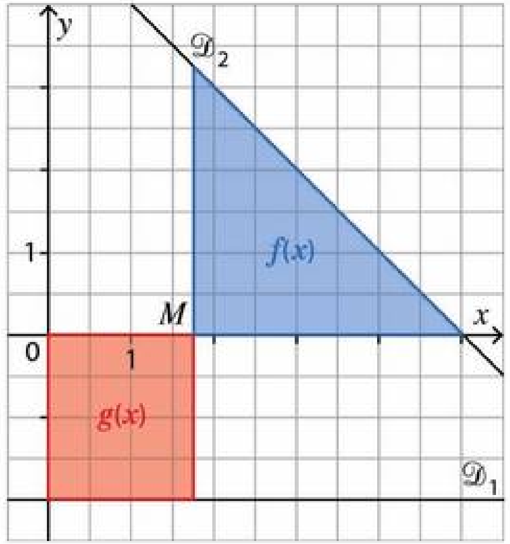
1. Développer et réduire le nombre :

$$(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1).$$

2. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le nombre $n^4 + n^2 + 1$ est premier.

75 Dans un repère ci-dessous, on a tracé les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Le point M est mobile sur l'axe des abscisses.

On note x l'abscisse de M. On a $x \in [0\,;5]$.



1. Exprimer l'aire de la surface du rectangle rouge, notée $g(x)$, en fonction de x.

2. Exprimer l'aire de la surface du triangle bleu rectangle isocèle en M, notée $f(x)$, en fonction de x.

3. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, conjecturer les valeurs de x pour lesquelles les aires sont égales.

4. Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à l'équation $(x - 7)^2 - 24 = 0$.

5. Déduire de la question **4** une vérification de la conjecture trouvée graphiquement.

76 CALCULATRICE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 1{,}4x^2 - 2x + 2{,}8.$$

1. Tracer la courbe représentative de f avec la calculatrice en respectant la fenêtre suivante :

$$XMin = -3\ ;\ XMax = 3\ ;$$
$$YMin = -3\ ;\ YMax = 4.$$

2. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3. Entrer les données ci-dessous pour zoomer autour de l'une des solutions de l'équation :

$$XMin = 1\ ;\ XMax = 2\ ;$$
$$YMin = -0{,}5\ ;\ YMax = 0{,}5.$$

La conjecture est-elle la même ?

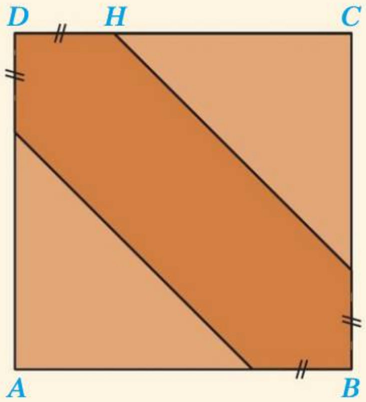
4. Affiner encore le zoom autour de la solution de l'équation.

a. Justifier que $f(x) = (x - 1{,}4)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

b. Expliquer « l'erreur » de conjecture.

79 PRISE D'INITIATIVE LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

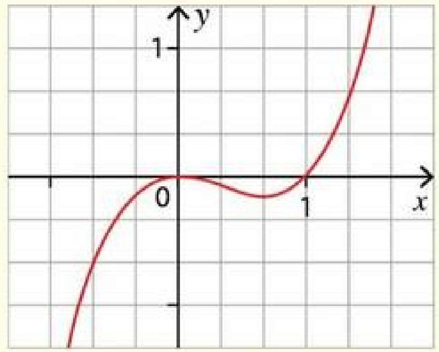
Un panneau ayant la forme d'une double flèche de surface 0,5 m² sera découpé dans une planche carrée de côté 1 m comme représenté ci-dessous.



• Comment choisir la longueur DH ?

82 On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 - x^2$.

On a tracé la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-contre.



1. Conjecturer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

2. Démontrer la conjecture précédente.

3. En utilisant le graphique, déterminer le signe de $f(x)$.

4. Démontrer la conjecture graphique de la question **3**.

5. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$.

6. En utilisant le graphique, donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;+\infty[$.

7. Calculer les valeurs exactes de $f(1{,}46)$ et $f(1{,}47)$. En utilisant la question **6**, justifier que la solution de l'équation $f(x) = 1$ est comprise entre 1,46 et 1,47.

8. CALCULATRICE En utilisant la calculatrice, déterminer un intervalle d'amplitude 10^{-4} qui contient la solution de l'équation $f(x) = 1$.