21 Résoudre les équations suivantes, où x est un nombre réel positif ou nul.

a. $4\sqrt{x}=0$ b. $5\sqrt{x}=5$

c. $-3\sqrt{x}+1=0$ d. $2\sqrt{x}-3=\sqrt{x}+2$

22 On considère l'équation $\sqrt{x-1}=4$.

1. Justifier que x doit être un nombre réel supérieur ou égal à 1.
2. Résoudre cette équation.

23 On considère l'équation $\sqrt{3-x}=1$.

1. Justifier que x doit être un nombre réel inférieur ou égal à 3.
2. Résoudre cette équation.

24 Résoudre graphiquement et algébriquement les inéquations suivantes où x est un nombre réel positif ou nul.

a. $\sqrt{x}\leqslant 3$ b. $\sqrt{x}\geqslant -2$

c. $2\sqrt{x}\leqslant 8$ d. $-3\sqrt{x}\geqslant 6$

25 On considère l'inéquation $\sqrt{x-4}\geqslant 2$.

1. Justifier que x doit être un nombre réel supérieur ou égal à 4.
2. En utilisant la calculatrice, résoudre graphiquement cette inéquation.

32 1. Tracer la courbe de la fonction inverse dans un repère orthonormé d'unité 1 cm sur chaque axe.

2. a. Tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*=]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$.

b. Expliquer comment on peut construire facilement cette courbe à partir de celle de la fonction inverse.

39 Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ les équations suivante

a. $\dfrac{1}{x}=-1$ b. $\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$

c. $\dfrac{1}{x}=\sqrt{2}$ d. $\dfrac{1}{x}=10^{-3}$

e. $\dfrac{1}{x}=0{,}03$ f. $\dfrac{1}{x}=\pi$

40 Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ les équations suivantes.

a. $\dfrac{2}{x}=3$ b. $-\dfrac{5}{x}=0{,}01$

c. $-\dfrac{1}{x}=7$ d. $\dfrac{3}{x}=\dfrac{1}{4}$

e. $\dfrac{1}{x}-5=0$ f. $\dfrac{1}{3x}=0$

43 Résoudre les équations suivantes.

a. $\dfrac{x-1}{2x}=0$, pour tout réel $x\neq 0$.

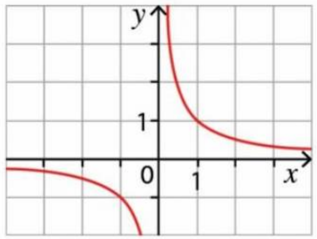
b. $\dfrac{x+2}{x-4}=0$, pour tout réel $x\neq 4$.

c. $\dfrac{5x+3}{3x-4}=0$, pour tout réel $x\neq\dfrac{4}{3}$.

d. $\dfrac{x+7}{x-3}=\dfrac{3x+1}{x-3}$, pour tout réel $x\neq 3$.

45 VRAI OU FAUX

En utilisant la courbe représentative de la fonction inverse donnée dans le repère orthonormé suivant, dire pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse.



1. L'ensemble de solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{x}\leqslant 1$, avec $x>0$, est $\mathcal{S}=[1\,;+\infty[$.
2. L'ensemble de solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{x}\leqslant -1$, avec $x<0$, est $\mathcal{S}=]-\infty\,;-1]$.

46 VRAI OU FAUX

Soit x un nombre réel tel que $\dfrac{1}{10}<x<1$.

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. $\dfrac{1}{x}>10$ 2. $1<\dfrac{1}{x}\leqslant 10$ 3. $0<\dfrac{1}{x}<100$

48 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{1}{x} \leqslant 4$ **2.** $\dfrac{1}{x} \geqslant 2$

3. $\dfrac{1}{x} < -2$ **4.** $\dfrac{1}{x} > -\dfrac{1}{2}$

49 On veut résoudre, pour tout réel $x \neq -3$, l'inéquation $\dfrac{4x-8}{x+3} \geqslant 0$.

1. Recopier et compléter le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
Signe de $4x-8$		$-$			0	$+$	
Signe de $x+3$		$-$	0				
Signe de $\dfrac{4x-8}{x+3}$		$+$					

2. Donner l'ensemble de solutions en utilisant le tableau.

50 **1.** Représenter dans un même repère orthonormé, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g définies par :

- $f(x) = \dfrac{3}{x}$, pour tout réel x non nul ;
- $g(x) = x - 2$, pour tout réel x.

2. Vérifier que les points $A(-1\,;-3)$ et $B(3\,;1)$ sont communs à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3. En déduire graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

51 Construire le tableau de signes de chacune des expressions suivantes.

a. $\dfrac{x}{x-3}$ **b.** $\dfrac{1-x}{5x}$ **c.** $\dfrac{x+1}{4-x}$

d. $\dfrac{2x-3}{x+4}$ **e.** $-\dfrac{x}{x+7}$ **f.** $-\dfrac{3\,(x-2)}{2x+6}$

53 Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ les équations suivantes.

1. $(3\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)(4\sqrt{x}-5)=0$

2. $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+5)=0$

3. $7x(-2\sqrt{x}-1)\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}-2\right)=0$

54 Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ les équations suivantes.

1. $(2\sqrt{x}-4)(3\sqrt{x}-2)=0$

2. $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)=0$

3. $x(3\sqrt{x}-6)\left(\frac{1}{3}\sqrt{x}-3\right)=0$

57 Factoriser les expressions suivantes puis résoudre les équations.

1. $(3\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)=(\sqrt{x}-2)^2$

2. $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-4)=(\sqrt{x}-4)^2$

58 Factoriser les expressions suivantes puis résoudre les équations.

1. $(\sqrt{x}-5)(2\sqrt{x}-1)=2\sqrt{x}-1$

2. $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-4)=3(\sqrt{x}-1)$

59 Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ les inéquations suivantes.

1. $2\sqrt{x}-7 \leqslant 0$ **2.** $-3\sqrt{x}+9>0$

3. $4\sqrt{x}-1 \leqslant -\sqrt{x}+3$ **4.** $4 \leqslant 2\sqrt{x}+1$

65 Prouver les égalités suivantes.

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$ **2.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

71 Résoudre les équations suivantes.

1. $\dfrac{3}{2x}=-2$, pour tout réel $x \neq 0$.

2. $\dfrac{3x+1}{x-3}=1$, pour tout réel $x \neq 3$.

3. $\dfrac{-x+4}{2x+1}=-2$, pour tout réel $x \neq -\dfrac{1}{2}$.

73 Résoudre les inéquations suivantes pour tout nombre réel x non nul.

1. $\frac{2}{x} \leqslant 3$
2. $-\frac{3}{x} > 6$
3. $-\frac{1}{x}+3 \geqslant 0$
4. $\frac{3}{x}+1 \leqslant \frac{4}{x}$

74 On considère un nombre x appartenant à l'intervalle $[2\,;8]$.
Déterminer un encadrement des réels suivants.

1. $\frac{1}{x}$
2. $-\frac{3}{x}$
3. $\frac{2}{x}-1$
4. $-\frac{1}{x}+4$
5. $\frac{2}{x}+\frac{1}{2}$
6. $\frac{1}{x-1}$

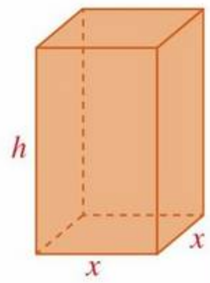
75 Résoudre les inéquations suivantes en utilisant un tableau de signes.

1. $\frac{x-2}{x+3} \leqslant 0$, pour tout réel $x \neq -3$.
2. $\frac{2x+1}{x-4} < 0$, pour tout réel $x \neq 4$.
3. $\frac{-x+1}{-3x+2} \geqslant 0$, pour tout réel $x \neq \frac{2}{3}$.
4. $\frac{-2x-4}{2x+2} < 0$, pour tout réel $x \neq -1$.

78 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\frac{2x+1}{x-3} \leqslant 0$, pour tout réel $x \neq 3$.
2. $\frac{-x+2}{-2x+1} \geqslant 0$, pour tout réel $x \neq \frac{1}{2}$.
3. $\frac{3x}{x-2} < 1$, pour tout réel $x \neq 2$.

77 Une boîte a la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur h et de base carrée de côté x, où x est un nombre réel positif appartenant à l'intervalle $[0\,;5]$.

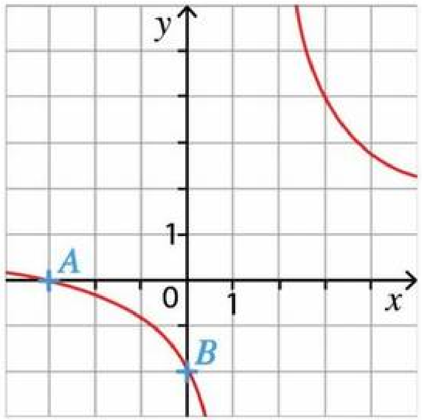


1. Calculer le volume de la boîte en fonction de x.
2. Donner l'expression de la surface de la boîte en fonction de h et de x.
3. On suppose que le volume de la boîte est de 1 dm³. Calculer h en fonction de x.
4. Montrer que la surface de la boîte, en fonction de x seulement, a pour expression :
$$S(x)=2x^2+\frac{4}{x}.$$
5. CALCULATRICE
En utilisant une calculatrice, conjecturer le minimum de la surface de la boîte. Pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?
6. Montrer que pour tout réel $x > 0$,
$$S(x)-S(1)=2(x-1)^2\frac{(x+2)}{x}.$$
En déduire une validation de la conjecture.

80 PRISE D'INITIATIVE

1. Développer l'expression $(x-1)(x-4)$.
2. Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(3\,;2)$ et $B(7\,;-2)$, et la fonction f définie pour tout réel x non nul par $f(x)=\frac{4}{x}$.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (AB) avec l'hyperbole représentant la fonction f.

81 On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq \dfrac{3}{2}$ par $f(x)=\dfrac{ax+b}{2x-3}$, où a et b sont deux réels inconnus. La courbe représentative de f est tracée dans le repère ci-dessous. Les points A et B appartiennent à la courbe de la fonction.



1. À l'aide des coordonnées des points A et B, montrer que, pour tout réel x, on a $f(x)=\dfrac{2x+6}{2x-3}$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 4$ et vérifier la réponse sur le graphique.

3. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.

Commenter la réponse en utilisant le graphique.

82 **1.** Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a. Pour tout nombre réel x positif ou nul,
$$\sqrt{x^2}=9 \Leftrightarrow x=9.$$

b. Pour tout nombre réel x,
$$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{5} \Leftrightarrow x=2.$$

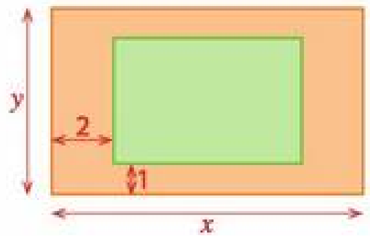
c. Pour tout nombre réel x positif ou nul,
$$\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=0.$$

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a. $\dfrac{x+1}{x-3}=2$ **b.** $\dfrac{x+1}{x} \geqslant 2$ **c.** $\dfrac{x+1}{x}<0$

84 ALGO PYTHON

Une mairie souhaite aménager pour ses administrés un grand terrain rectangulaire de dimensions x et y exprimées en mètre. Elle souhaite réserver, au centre de ce terrain, un espace en herbe de forme rectangulaire et d'aire égale à 1 000 m², entouré d'une allée de largeur 2 m et 1 m, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



1. Justifier que $x>4$ et $y>2$.

2. Pour calculer la valeur de y en fonction de x, l'urbaniste a écrit la fonction en Python.

```
def y(x):
    l=x-4
    y=1000/l-2
    return y
```

a. Son algorithme est-il correct ? Justifier.

b. Programmer une fonction $A(x)$ qui renvoie l'aire totale du terrain en fonction de la longueur x.

3. On considère la fonction suivante.

```
def m(sup):
    x=4
    xm=x
    m=A(4.1)
    while x<sup:
        x=x+0.1
        if A(x)<m:
            xm=x
            m=A(x)
    return(m,xm)
```

a. Qu'affiche l'instruction `>>> m(100)` ?

b. Interpréter les résultats renvoyés.

86 **Modéliser**

Un artisan fabrique des bonbons. Le coût total de fabrication de x kg de bonbons est donné par la fonction :

$$C(x) = x + 40,$$

où $C(x)$ est exprimé en euro.

L'artisan vend ses bonbons 5 euros le kg.

1. Quel est le coût pour l'artisan lorsqu'il fabrique 2 kg de bonbons ? 50 kg ?

2. a. Quelle est la recette de l'artisan lorsqu'il fabrique 2 kg de bonbons ? 50 kg ?

b. Exprimer la recette en fonction de x.

3. Le bénéfice de l'artisan est la différence entre ses recettes et ses coûts. On le note $B(x)$.

a. Calculer $B(x)$ en fonction de x.

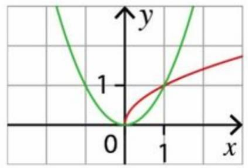
b. À partir de quelle quantité de bonbons l'artisan fera-t-il un bénéfice ?

4. L'artisan veut étudier le bénéfice moyen par kilogramme de bonbons fabriqué. Ce bénéfice moyen se calcule par $B_m(x) = \dfrac{B(x)}{x}$. Il s'exprime en euro par kilo.

a. Déterminer le bénéfice moyen pour 15 kg de bonbons vendus.

b. Calculer la quantité de bonbons à fabriquer pour avoir un bénéfice moyen supérieur ou égal à 3 euros par kilo.

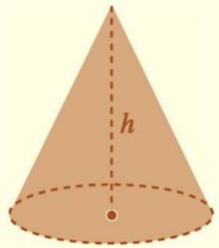
85 **Approfondissement**



Sur le graphique ci-contre, on a tracé les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$ pour tout réel x et $g(x) = \sqrt{x}$ pour tout réel x positif.

- Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

94 On s'intéresse à un cône de volume 60 cm^3.



On note h la longueur de la hauteur du cône et R le rayon de sa base.

1. Exprimer h en fonction de R.

2. Déterminer le rayon minimum que doit avoir la base du cône pour que la hauteur soit inférieure à 18 cm.

95 **Calculer**

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{2x+1}{4-x} > 1$, pour tout réel $x \neq 4$.

2. $\dfrac{1}{2x-4} \leqslant 1$, pour tout réel $x \neq 2$.

3. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} \leqslant 0$, pour tout réel $x \neq 0$ et $x \neq 2$.