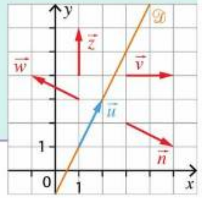
Exercice résolu 1 Identifier des vecteurs normaux à une droite



On considère la droite $\mathcal{D}$ dont le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur.

- Quels sont, parmi les vecteurs $\vec{n}$, $\vec{w}$, $\vec{v}$ et $\vec{z}$ représentés sur la figure ci-contre, les deux vecteurs normaux à $\mathcal{D}$?

Solution commentée

D'après la figure, on conjecture que les deux vecteurs normaux à $\mathcal{D}$ sont $\vec{n}$ et $\vec{w}$.

Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{n}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Or $\vec{n}\cdot\vec{u} = 2\times 1 + (-1)\times 2 = 2 - 2 = 0$. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont donc orthogonaux.

On en déduit que $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. On a donc $\vec{w} = -\vec{n}$.

$\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont donc deux vecteurs colinéaires, or $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{D}$, donc $\vec{w}$ l'est aussi.

Exercice résolu 2 Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à une droite donnée.

1. Soit $\mathcal{D}_1$ la droite passant par le point $A(2\,;5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.
Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}_1$.
2. Soit $\mathcal{D}_2$ la droite dont une équation cartésienne est $-x - 4y + 1 = 0$.
Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}_2$.

Solution commentée

1. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ donc $\mathcal{D}_1$ admet une équation cartésienne de la forme $3x + y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$. On en déduit que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_1$.
On peut vérifier que les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont bien orthogonaux : $\vec{n}\cdot\vec{u} = 3\times(-1) + 1\times 3 = 0$.
2. L'équation cartésienne donnée est de la forme $ax + by + c = 0$, avec $a = -1$ et $b = -4$. Donc un vecteur normal à $\mathcal{D}_2$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, soit ici $\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$.

Exercice résolu 3 Déterminer une équation cartésienne de droite

Soit Δ une droite passant par le point $A(2\,;1)$ et dont le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

- Déterminer une équation cartésienne de Δ.

Solution commentée

$M(x\,;y)$ appartient à $\mathcal{D} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow -1\times(x-2) + 2\times(y-1) = 0$

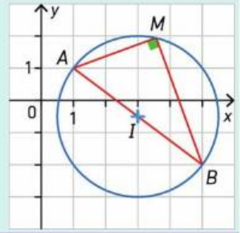
$\Leftrightarrow -x + 2 + 2y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow -x + 2y = 0$

On en déduit qu'une équation cartésienne de Δ est $-x + 2y = 0$.

EXERCICE 9 p. 258

Exercice résolu 1 Déterminer une équation de cercle



Soient les points $A(1\,;1)$ et $B(5\,;-2)$.

- Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.
- Déterminer les coordonnées de son centre et la valeur de son rayon.

Solution commentée

1[re] méthode : Soit un point $M(x\,;y)$. On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\1-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}5-x\\-2-y\end{pmatrix}$.

$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow (1-x)(5-x) + (1-y)(-2-y) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + y = -3$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = -3$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

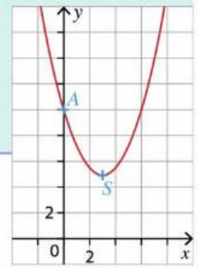
On en déduit que le cercle a pour centre le point $I\left(3\,;-\frac{1}{2}\right)$ et pour rayon $\sqrt{\frac{25}{4}}$, soit $\frac{5}{2}$.

2[e] méthode : Le centre du cercle $\mathscr{C}$ est le point I de coordonnées $\left(\frac{1+5}{2}\,;\frac{1-2}{2}\right)$, donc $\left(3\,;-\frac{1}{2}\right)$.

Le carré du rayon du cercle $\mathscr{C}$ est égal à $AI^2 = (3-1)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{25}{4}$. Son rayon vaut $\sqrt{\frac{25}{4}}$, soit $\frac{5}{2}$.

Donc $\mathscr{C}$ admet pour équation $(x-3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Exercice résolu 2 Déterminer l'équation d'une parabole



On considère une parabole dont le sommet S a pour coordonnées $(3\,;5)$ et qui passe par le point $A(0\,;10)$.

- Déterminer une équation de cette parabole.

Solution commentée

On cherche l'équation de la parabole sous la forme $y = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois réels donnés tels que $a \neq 0$.

L'abscisse du sommet S vaut $-\frac{b}{2a} = 3$.

On en déduit que $-b = 3\times 2a$, soit $b = -6a$.

De plus, l'ordonnée du point S est 5, on en déduit donc que $5 = a\times 3^2 + b\times 3 + c$, ce qui équivaut à $9a + 3b + c = 5$.

Par ailleurs la parabole passe par le point de coordonnées $(0\,;10)$, donc $c = 10$.

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} c = 10\\ b = -6a\\ 9a + 3b + c = 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 10\\ b = -6a\\ 9a + 3b = -5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 10\\ b = -6a\\ 9a + 3\times(-6a) = -5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 10\\ b = -6a\\ -9a = -5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 10\\ b = -6\times\frac{5}{9} = \frac{-10}{3}.\\ a = \frac{5}{9}\end{cases}$$

Donc une équation de la parabole est $y = \frac{5}{9}x^2 - \frac{10}{3}x + 10$.