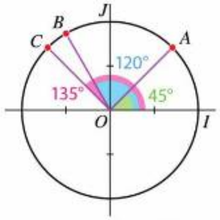
Exercice résolu 1 Déterminer la longueur d'un arc

Déterminer la longueur des arcs $\overset{\frown}{IA}$, $\overset{\frown}{IB}$ et $\overset{\frown}{IC}$ sur ce cercle de centre O et de rayon 1.

Solution commentée

La longueur du cercle est égale à 2π, ce qui correspond à un angle de 360°.
Longueur d'arc et angle au centre sont des grandeurs proportionnelles, on obtient donc les résultats suivants en utilisant par exemple l'égalité des produits en croix.

Mesure de l'angle en degré	45	120	135
Longueur de l'arc	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$



EXERCICE 4 p. 100

Exercice résolu 2 Convertir des angles en radian

Convertir en radian les mesures d'angles de mesures suivantes données en degré.

1. 30° **2.** 0° **3.** 150° **4.** 210° **5.** 225°

Solution commentée

On utilise un tableau de proportionnalité sachant que 360° correspondant à 2π radians.

Mesure de l'angle en degré	30	0	150	210	225
Mesure de l'angle en radian	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$

EXERCICE 2 p. 100

Exercice résolu 3 Convertir des angles en degré

Convertir en degré, les angles de mesures suivantes données en radian.

1. $\frac{3\pi}{2}$ **2.** $\frac{2\pi}{5}$ **3.** $\frac{3\pi}{4}$ **4.** $\frac{7\pi}{3}$ **5.** $\frac{\pi}{8}$

Solution commentée

On utilise un tableau de proportionnalité.

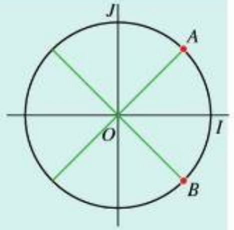
Mesure de l'angle en radian	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$
Mesure de l'angle en degré	270	72	135	75	22,5

EXERCICE 3 p. 100

Exercice résolu 1 Se repérer sur le cercle trigonométrique

Le cercle ci-contre est le cercle trigonométrique partagé en huit arcs de même longueur.

• Pour chacun des points A et B du cercle, donner deux réels dont il est le point-image.



Solution commentée

Pour aller de I à A dans le sens trigonométrique, on parcourt un arc de longueur un huitième de la longueur du cercle.

A est donc le point-image du nombre $\frac{\pi}{4}$.

Pour déterminer un autre réel dont A est le point-image, il suffit d'ajouter ou de retrancher 2π.

Par exemple, $\frac{\pi}{4} - 2\pi = \frac{\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$. A est le point-image du réel $-\frac{7\pi}{4}$ en parcourant le cercle dans le sens contraire du sens trigonométrique.

B est le point-image du réel $-\frac{\pi}{4}$ en parcourant le cercle dans le sens contraire du sens trigonométrique.

Pour déterminer un autre réel dont B est le point-image, il suffit d'ajouter ou de retrancher 2π.

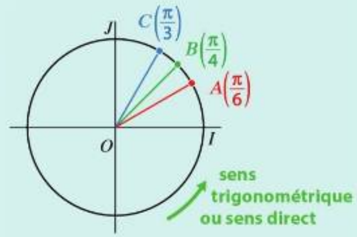
Par exemple : $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

EXERCICE 6 p. 100

Exercice résolu 2 Placer des points sur le cercle trigonométrique

On a placé sur le cercle trigonométrique trois points-images de trois nombres.

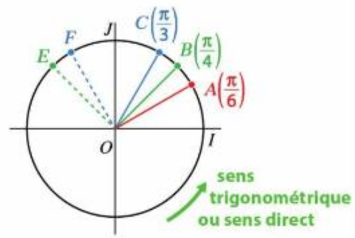
• Reproduire le cercle et placer les points $E\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $F\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.



Solution commentée

B est le point-image de $\frac{\pi}{4}$. Lorsqu'on reporte deux fois l'arc $\overset{\frown}{OB}$ à partir de I, on arrive sur J, le point-image de $\frac{2\pi}{4}$. On reporte une fois encore l'arc $\overset{\frown}{OB}$ pour obtenir le point-image de $\frac{3\pi}{4}$, soit E.

C est le point-image de $\frac{\pi}{3}$. On reporte quatre fois à partir de I l'arc $\overset{\frown}{OC}$ dans le sens contraire du sens trigonométrique. Le point obtenu est le point-image de $-\frac{4\pi}{3}$, soit le point F.



EXERCICE 10 p. 100

Exercice résolu 1 Utiliser le cercle trigonométrique

Donner, sans calculatrice, le signe des nombres réels suivants.

1 $a = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ 2 $b = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) - 1$

Solution commentée

1 On sait que $-1 \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \leqslant 1$. On utilise la deuxième inégalité :

$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \leqslant 1$ donc $1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \geqslant 0$. $1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est donc un réel positif.

2 On sait que $-1 \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \leqslant 1$. On utilise la première inégalité :

$-1 \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ donc $-1 - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \leqslant 0$. $-1 - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ est donc un réel négatif.

Exercice résolu 2 Déterminer des valeurs du sinus et du cosinus

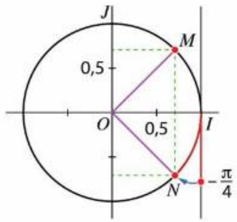
En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs exactes des cosinus et sinus de $-\frac{\pi}{4}$.

Solution commentée

On place les images de ces réels sur le cercle trigonométrique.
Le point-image de $-\frac{\pi}{4}$ est le point N.
N est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du point M image de $\frac{\pi}{4}$.

On sait que M a pour coordonnées $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Donc $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Donc $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



EXERCICE 13 p. 101

Exercice résolu 3 Utiliser les valeurs remarquables du sinus et du cosinus

Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'une fraction.

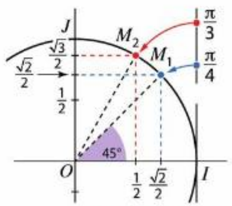
1 $A = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 2 $B = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Solution commentée

En utilisant le cercle trigonométrique, et avec les valeurs remarquables à connaître, on trouve que :

1 $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; donc $A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

2 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; donc $B = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

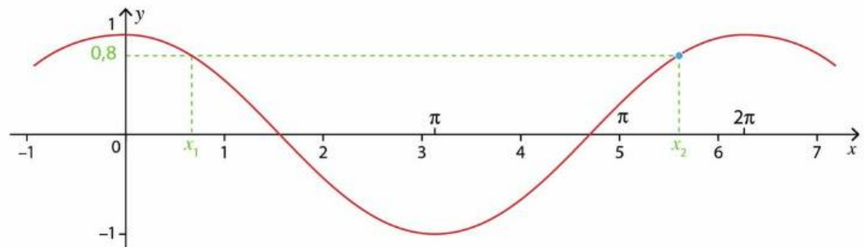


EXERCICE 25 p. 101

Exercice résolu 1 Utiliser la courbe représentative de la fonction cosinus

En utilisant la courbe représentative de la fonction cosinus, résoudre graphiquement l'équation $\cos(x) = 0{,}8$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$. Donner les valeurs approchées des solutions au dixième.

Solution commentée



On trace la droite d'équation $y = 0{,}8$.
Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la droite avec la courbe représentative de la fonction cosinus.
On trouve deux valeurs approchées : $x_1 \approx 0{,}6$ et $x_2 \approx 5{,}6$.

EXERCICE 28 p. 102

Exercice résolu 2 Étudier la périodicité d'une fonction trigonométrique

On considère la fonction trigonométrique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

• Démontrer que la fonction f est périodique de période 2π.

Solution commentée

Pour tout réel x, on calcule $f(x + 2\pi)$.
$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \sin(x) + \cos(x)$ car les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.
On a donc $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour tout x réel. La fonction f est périodique de période 2π.

EXERCICE 33 p. 102

Exercice résolu 3 Montrer qu'une fonction est paire ou impaire

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \sin(x) + x$.

1 Montrer que la fonction est impaire.

2 Qu'en déduit-on pour sa courbe représentative dans un repère orthonormé ?

Solution commentée

1 On calcule $f(-x) = \sin(-x) + (-x) = -\sin(x) - x$ car la fonction sinus est impaire.
On a alors $f(-x) = -(\sin(x) + x) = -f(x)$ pour tout x réel.
La fonction f est impaire.

2 La courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'origine O du repère.