Exercice résolu 1 Montrer qu'une fonction est paire

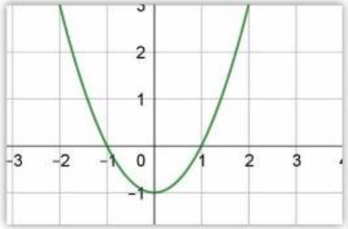
On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 - 1$.

1. Montrer que la fonction f est paire.
2. Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative dans un repère $(O\,;I, J)$? Vérifier sur la calculatrice ou un ordinateur.

Solution commentée

1. Soit x un réel quelconque. On calcule $f(-x)$ en remplaçant x par $-x$ dans l'expression de f.
$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1$, car la fonction carré est paire, donc $(-x)^2 = x^2$.
On a bien $f(-x) = f(x)$, ce qui signifie que la fonction f est paire.

2. On en déduit que la courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



EXERCICE 10 p. 124

Exercice résolu 2 Utiliser les variations de la fonction carré

En utilisant les variations de la fonction carré :

1. Donner un encadrement de x^2 dans chaque cas suivant.
   a. $x \in [3\,;5]$ **b.** $x \in [-4\,;-1]$
2. Donner tous les nombres x, tels que $x^2 \geqslant 9$.

Solution commentée

1. **a.** $x \in [3\,;5]$ signifie que $3 \leqslant x \leqslant 5$. La fonction carré f étant croissante sur $[0\,;+\infty[$, quand les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ augmentent également.
On en déduit que $9 \leqslant x^2 \leqslant 25$.

x	0	3	5	$+\infty$
Variation de f	0 ↗	9 ↗	25 ↗	

b. $x \in [-4\,;-1]$ signifie que $-4 \leqslant x \leqslant -1$. La fonction carré f étant décroissante sur $]-\infty\,;0]$, quand les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ diminuent.
On en déduit que $16 \geqslant x^2 \geqslant 1$.

x	$-\infty$	-4	-1	0
Variation de f	↘	16 ↘	1 ↘	0

2. La fonction carré f étant croissante sur $[0\,;+\infty[$, les nombres positifs tels que $x^2 \geqslant 9$ sont les nombres tels que $x \geqslant 3$.
Par symétrie, les nombres négatifs vérifiant $x^2 \geqslant 9$ sont les nombres tels que $x \leqslant -3$.

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
Variation de f	↘	9 ↘	0 ↗	9 ↗	

EXERCICE 12 p. 124

Exercice résolu 1 Montrer qu'une fonction est impaire

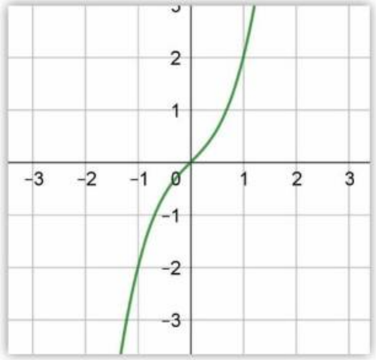
On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 + x$.

1. Démontrer que la fonction f est impaire.
2. Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative dans un repère $(O\,;I, J)$? Vérifier sur la calculatrice ou un ordinateur.

Solution commentée

1. Soit x un réel quelconque. On calcule $f(-x)$ en remplaçant x par $-x$ dans l'expression de f.
$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x$, car la fonction cube est impaire, donc $(-x)^3 = -x^3$.
On a bien $f(-x) = -(x^3 + x) = -f(x)$, ce qui signifie que la fonction f est impaire.

2. On en déduit que la courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'origine O du repère.



EXERCICE 21 p. 125

Exercice résolu 2 Utiliser les variations de la fonction cube

Un ballon gonflable a la forme d'une sphère dans laquelle on injecte un gaz plus léger que l'air (hélium) pour qu'il puisse s'envoler.
Le volume du ballon dépend de la quantité de gaz injectée.

1. Quelle est l'expression du volume du ballon en fonction de son rayon ?
2. Compléter le tableau de valeurs suivant.

Rayon R	0	1	3	5	10
Volume V					

3. Que dire du volume lorsque le rayon augmente ?

Solution commentée

1. Le volume V est égal à $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

2.

Rayon R	0	1	3	5	10
Volume V	0	4,19	113,10	523,60	4 188,80

3. Lorsque le rayon augmente, le volume augmente aussi car la fonction cube est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

EXERCICE 22 p. 125

Exercice résolu 1 Résoudre des équations du type $x^2 = k$

Résoudre les équations suivantes.

1. $3x^2 = 45$ 2. $2x^2 + 5 = 0$

Solution commentée

On transforme d'abord l'équation pour avoir une équation du type $x^2 = k$.

1. $3x^2 = 45 \Leftrightarrow x^2 = 15$, donc $\mathscr{S} = \{-\sqrt{15}\ ;\ \sqrt{15}\}$.

2. $2x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{5}{2} < 0$, donc $\mathscr{S} = \varnothing$.

EXERCICE 23 p. 125

Exercice résolu 2 Déterminer une réunion d'intervalles

Dans chaque cas suivant, représenter graphiquement les intervalles et déterminer leur réunion.

1. $I = [-3\,;7]$ et $J = [-1\,;10]$.
2. $I =]-\infty\,;-1]$ et $J = [-3\,;5]$.
3. $I = [-2\,;1]$ et $J = [3\,;+\infty[$.

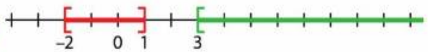
Solution commentée

1. 

$I \cup J = [-3\ ;\ 10]$

2. 

$I \cup J =]-\infty\ ;\ 5]$

3. 

$I \cup J = [-2\ ;\ 1] \cup [3\ ;+\infty[$

EXERCICE 33 p. 126

Exercice résolu 3 Résoudre des inéquations du type $x^2 \leqslant k$

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $2(x^2 - 3) \geqslant 0$ 2. $7 - x^2 > 0$

Solution commentée

On transforme d'abord l'inéquation pour avoir une inéquation du type $x^2 \leqslant k$.

1. $2(x^2 - 3) \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 3$
$\mathscr{S} =]-\infty\,;-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}\,;+\infty[$.

2. $7 - x^2 > 0 \Leftrightarrow 7 > x^2 \Leftrightarrow x^2 < 7$
$\mathscr{S} =]-\sqrt{7}\,;\sqrt{7}[$.

EXERCICE 35 p. 127

Exercice résolu 1 Résoudre une inéquation du type $(ax + b)(cx + d) \leqslant 0$

1. Résoudre algébriquement l'inéquation $(2x - 6)(-3x - 15) \leqslant 0$.
2. Résoudre algébriquement l'inéquation $(x + 3)(-2x - 7) > 0$.

Solution commentée

1. • On étudie le signe de chaque facteur du premier degré.

$2x - 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x \geqslant 6$
$\Leftrightarrow x = \frac{6}{2}$
$\Leftrightarrow x \geqslant 3$

$-3x - 15 \geqslant 0 \Leftrightarrow -3x \geqslant 15$
$\Leftrightarrow x \leqslant \frac{15}{-3}$
$\Leftrightarrow x \leqslant -5$

• On consigne les résultats dans un tableau global.
La dernière ligne s'obtient par la règle des signes.
• On donne la solution de l'inéquation sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles : $\mathscr{S} =]-\infty\,;-5] \cup [3\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
Signe de $2x - 6$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $-3x - 15$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $(2x - 6)(-3x - 15)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. • On étudie le signe de chaque facteur du premier degré.

$x + 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -3$

$-2x - 7 \leqslant 0 \Leftrightarrow -2x \leqslant 7$
$\Leftrightarrow x \geqslant -\frac{7}{2}$

• On consigne les résultats dans un tableau global.
La dernière ligne s'obtient par la règle des signes.
• On donne la solution sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		-3		$+\infty$
Signe de $x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2x - 7$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $(x + 3)(2x - 7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathscr{S} = \left]-\frac{7}{2}\ ;\ -3\right[$.

EXERCICE 38 p. 127

Exercice résolu 2 Comparer des nombres

1. Sans utiliser la calculatrice, comparer les nombres $0{,}8^2$ et $0{,}8^3$.
2. Sans utiliser la calculatrice, comparer les nombres 1,6, $(1{,}6)^2$ et $(1{,}6)^3$.

Solution commentée

1. 0,8 appartient à l'intervalle [0 ; 1].
Pour tout réel appartenant à cet intervalle, on a $x^3 \leqslant x^2$, donc $0{,}8^3 \leqslant 0{,}8^2$.

2. Pour tout réel $x \geqslant 1$, on a $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$, donc $1{,}6 \leqslant 1{,}6^2 \leqslant 1{,}6^3$.

EXERCICE 44 p. 127