Exercice résolu 1 Utiliser les variations de la fonction racine carrée

En utilisant les variations de la fonction racine carrée, donner un encadrement de $\sqrt{x}$ dans les cas suivants.

1. $x \in [2 ; 9]$
2. $x \in [4 ; +\infty[$

Solution commentée

1. $x \in [2 ; 9]$ signifie que $2 \leqslant x \leqslant 9$.
La fonction racine carrée étant croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, quand les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ augmentent aussi.
On en déduit que $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{9}$, soit $\sqrt{x} \in [\sqrt{2} ; 3]$.

x	0	2	9	$+\infty$
Variation de la fonction racine carée	0 ↗	$\sqrt{2}$ ↗	3 ↗	

2. $x \in [4 ; +\infty[$ signifie que $x \geqslant 4$. La fonction racine carrée étant croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, quand les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ augmentent aussi.
On en déduit que $\sqrt{x} \geqslant \sqrt{4}$ soit $\sqrt{x} \in [2 ; +\infty[$.

x	0	4	$+\infty$
Variation de la fonction racine carée	0 ↗	2 ↗	

EXERCICE 18 p. 156

Exercice résolu 2 Écrire une racine sous la forme $a\sqrt{b}$

Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers et b est positif et le plus petit possible.

1. $\sqrt{75}$
2. $\sqrt{162}$

Solution commentée

On écrit le nombre sous la racine sous la forme d'un produit où figure un carré parfait.

1. $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
2. $\sqrt{162} = \sqrt{81 \times 2} = \sqrt{81} \times \sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

EXERCICE 15 p. 156

Exercice résolu 3 Calculer avec des racines carrées

Simplifier les expressions suivantes.

1. $2\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$
2. $2\sqrt{2} \times 4\sqrt{18}$

Solution commentée

1. $2\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = (2-5)\sqrt{7} = -3\sqrt{7}$
2. $2\sqrt{2} \times 4\sqrt{18} = 2 \times 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{18} = 8\sqrt{36} = 8 \times 6 = 48$

EXERCICE 13 p. 156

Exercice résolu 1 Représenter graphiquement la fonction inverse

Une entreprise fabrique x produits identiques en quantité limitée, $x \in [50 ; 100]$.

On suppose que le prix $p(x)$ de chaque produit dépend de la quantité x d'objets susceptibles d'être vendus. $p(x)$ est donné par l'expression $p(x) = \frac{1}{x}$ (en euro), et on appelle $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction p sur l'intervalle donné.

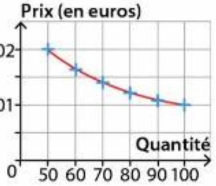
1. Les points (50 ; 0,02) et B(80 ; 0,013) appartiennent-ils à la courbe $\mathscr{C}$?
2. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Solution commentée

1. On calcule $p(50) = 0{,}02$, donc le point $A(50 ; 0{,}02)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$.
On calcule $p(80) = 0{,}0125$.
$0{,}0125 \neq 0{,}013$, donc le point $B(80 ; 0{,}013)$ n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}$.

2. Le tableau de valeurs affiché à la calculatrice permet de choisir une échelle correspondant à l'intervalle donné. La partie de l'axe des abscisses avant la valeur 50 n'est pas à l'échelle. La courbe est une hyperbole. On trace la partie de la courbe sur l'intervalle considéré [50 ; 100].

X	Y1
50	.02
60	.01667
70	.01429
80	.0125
90	.01111
100	.01



EXERCICE 29 p. 157

Exercice résolu 2 Connaître les variations de la fonction inverse

Un véhicule électrique d'essai doit parcourir une distance d'un kilomètre à vitesse constante.

On réalise plusieurs essais avec ce véhicule.

Les temps t (en minute) mis par le véhicule pour parcourir le kilomètre appartiennent tous à l'intervalle [2 ; 3].

- Déterminer un encadrement de la vitesse du véhicule en km·h⁻¹.

On rappelle que l'expression de la vitesse v pour une distance d parcourue en un temps t est $v = \frac{d}{t}$.

Solution commentée

On doit exprimer le temps t en heure pour déterminer la vitesse en km·h⁻¹. Deux minutes sont un trentième d'heure ; trois minutes sont un vingtième d'heure, donc $t \in \left[\frac{1}{30} ; \frac{1}{20}\right]$.

t	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$
v	30 ↘	20

La distance est 1 km. On a donc ici $v = \frac{1}{t}$.

Ainsi, pour un temps de parcours d'un trentième d'heure, la vitesse est de 30 km·h⁻¹ et pour un temps de parcours d'un vingtième d'heure, la vitesse est de 20 km·h⁻¹.

La fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc lorsque $\frac{1}{30} \leqslant t \leqslant \frac{1}{20}$, on en déduit que $30 \geqslant v \geqslant 20$.

La vitesse du véhicule électrique est donc comprise entre 20 km·h⁻¹ et 30 km·h⁻¹.

EXERCICE 34 p. 158

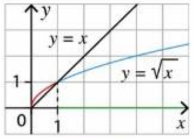
Exercice résolu 1 Résoudre une inéquation graphiquement

On considère les fonctions f et g définies sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x$.

• En utilisant les courbes représentatives des fonctions f et g, résoudre graphiquement l'inéquation $\sqrt{x}\leqslant x$.

Solution commentée

On trace dans un même repère les courbes représentatives des fonctions f et g. Les deux courbes se coupent au point de coordonnées $(1\,;1)$.
On colorie en bleu la partie de la parabole en dessous de la droite.
Les solutions sont les abscisses des points correspondants.
On trouve donc $\mathcal{S}=[1\,;+\infty[$.



EXERCICE 24 p. 157

Exercice résolu 2 Résoudre une équation algébriquement

Soit x un nombre réel positif.

Résoudre les équations suivantes.

1. $2\sqrt{x}-8=0$
2. $3\sqrt{x}-1=0$

Solution commentée

1. $2\sqrt{x}-8=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}=8 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{8}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x}=4 \Leftrightarrow x=16$

On trouve donc $\mathcal{S}=\{16\}$.

2. $3\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

On trouve donc $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{9}\right\}$.

EXERCICE 21 p. 156

Exercice résolu 3 Résoudre une inéquation algébriquement

Soit x un nombre réel positif.

Résoudre les inéquations suivantes et donner leur ensemble de solutions sous la forme d'un intervalle.

1. $2\sqrt{x}-1\leqslant 5$
2. $3\sqrt{x}-1>0$

Solution commentée

1. $2\sqrt{x}-1\leqslant 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}\leqslant 6 \Leftrightarrow \sqrt{x}\leqslant\frac{6}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x}\leqslant 3 \Leftrightarrow 0\leqslant x\leqslant 9$, car x est un réel positif.
On trouve $\mathcal{S}=[0\,;9]$.

2. $3\sqrt{x}-1>0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}>1 \Leftrightarrow \sqrt{x}>\frac{1}{3} \Leftrightarrow x>\left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x>\frac{1}{9}$

On trouve $\mathcal{S}=\left]\frac{1}{9}\,;\,+\infty\right[$.

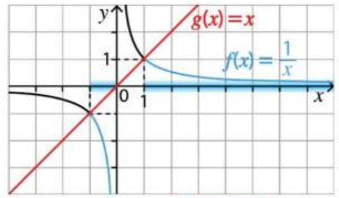
EXERCICE 24 p. 157

Exercice résolu 1 Résoudre une inéquation graphiquement

À l'aide de la représentation graphique de la fonction inverse, résoudre graphiquement l'inéquation $\frac{1}{x}<x$.

Solution commentée

On trace dans un même repère les courbes représentatives des fonctions $f(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=x$.
On colorie en bleu les parties de l'hyperbole qui sont situées en dessous de la droite.
Les solutions sont les abscisses des points correspondants :
$\mathcal{S}=]-1\,;0[\cup]1\,;+\infty[$.



EXERCICE 45 p. 159

Exercice résolu 2 Résoudre une équation

1. Résoudre algébriquement l'équation $\frac{2}{x}=5$.
2. Résoudre algébriquement l'équation $\frac{1}{2x}+3=0$.

Solution commentée

1. $\frac{2}{x}=5 \Leftrightarrow 2=5x \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$. On a $\mathcal{S}=\left\{\frac{2}{5}\right\}$.
2. $\frac{1}{2x}+3=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2x}=-3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}=-3x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{6}$. On a $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{6}\right\}$.

EXERCICE 40 p. 158

Exercice résolu 3 Résoudre une inéquation avec un tableau de signes

Résoudre algébriquement l'inéquation $\frac{-x+4}{x+2}\geqslant 0$ sur $]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[$.

Solution commentée

On détermine le signe du numérateur et du dénominateur :

$$-x+4\geqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant 4 \quad\text{et}\quad x+2\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant -2.$$

On obtient ainsi les deux nombres de la première ligne du tableau et on utilise la règle des signes.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
Signe de $-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{-x+4}{x+2}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

-2 est une valeur interdite ; on met une double barre dans le tableau.
On obtient le signe « + » entre -2 et 4 à la dernière ligne, donc $\mathcal{S}=]-2\,;4]$.

EXERCICE 49 p. 15