1ère spé maths — Lois de Probabilités – Méthodes — Mai 2020

Exercice résolu 1 Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire

On lance un dé équilibré à 6 faces deux fois de suite. Pour chaque lancer, un résultat pair fait gagner 2 € et un résultat impair fait perdre 1 €. On appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique en fin de partie.

1. Quelles sont les valeurs prises par cette variable aléatoire X ?
2. Quelle(s) issue(s) réalise(nt) l'évènement $\{X = 4\}$?
3. Quelle(s) issue(s) réalise(nt) l'évènement $\{X < 0\}$?

Solution commentée

1. On peut avoir :
   – deux résultats pairs : le gain est alors égal à 4 € ;
   – deux résultats impairs : le gain est alors égal à –2 € ;
   – un résultat pair et un impair : le gain est alors égal à 1 €.
   Ainsi, les valeurs possibles pour X sont 4, –2 et 1.
2. L'évènement $\{X = 4\}$ est réalisé si on obtient deux résultats pairs. Les issues réalisant cet évènement sont donc : (2 ; 2) ; (2 ; 4) ; (2 ; 6) ; (4 ; 2) ; (4 ; 4) ; (4 ; 6) ; (6 ; 2) ; (6 ; 4) ; (6 ; 6).
3. L'évènement $\{X < 0\}$ est réalisé lorsque $X = -2$, c'est à dire si on obtient deux résultats impairs. Les issues réalisant cet évènement sont donc : (1 ; 1) ; (1 ; 3) ; (1 ; 5) ; (3 ;1) ; (3 ; 3) ; (3 ; 5) ; (5 ; 1) ; (5 ; 3) ; (5 ; 5).

EXERCICE 1 p. 324

Exercice résolu 2 Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire

On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est constitué de 4 familles de couleurs (cœur, carreau, trèfle et pique), chacune constituée de trois figures (roi, dame, valet), d'un as et de cartes numérotées de 7 à 10.

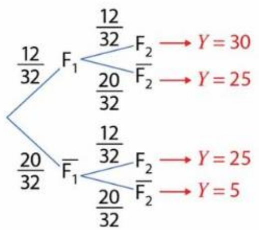
Dans un jeu de 32 cartes, on tire successivement et avec remise deux cartes. On définit la variable aléatoire Y de la façon suivante.

Si on tire deux figures, alors $Y = 30$; si on tire une figure et une autre carte, alors $Y = 25$; dans tous les autres cas, $Y = 5$.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
2. Déterminer $P(Y \geqslant 25)$.

Solution commentée

1. On note F_1 l'évènement « On obtient une figure au premier tirage » et F_2 l'évènement « On obtient une figure au second tirage ». On représente cette situation par un arbre pondéré. On calcule ensuite la probabilité que Y prenne chacune de ses valeurs possibles.



$P(Y=30) = \frac{12}{32} \times \frac{12}{32} = \frac{9}{64}$

$P(Y=25) = \frac{12}{32} \times \frac{20}{32} + \frac{20}{32} \times \frac{12}{32} = \frac{15}{32}$

$P(Y=5) = \frac{20}{32} \times \frac{20}{32} = \frac{25}{64}$

La loi de probabilité de Y est donc :

y_i	30	25	5
$P(Y = y_i)$	$\frac{9}{64}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{25}{64}$

2. $P(Y \geqslant 25) = P(Y = 30) + P(Y = 25)$.
   Donc $P(Y \geqslant 25) = \frac{9}{64} + \frac{15}{32} = \frac{39}{64}$.

Exercice résolu 1 Calculer une espérance, une variance et un écart type

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-contre.

x_i	–1	2	3	5
$P(X = x_i)$	0,4	0,1	0,2	0,3

• Calculer l'espérance de X, sa variance et son écart type.

Solution commentée

1. $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = -1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}1 + 3 \times 0{,}2 + 5 \times 0{,}3 = 1{,}9$.

$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p^2(x_2 - E(X))^2 + p_3(x_3 - E(X))^2 + p_4(x_4 - E(X))^2$

$= 0,4 \times (-1 - 1{,}9)^2 + 0{,}1 \times (2 - 1{,}9)^2 + 0{,}2 \times (3 - 1{,}9)^2 + 0{,}3 \times (5 - 1{,}9)^2$

$= 6{,}49$

$\sigma(X) = \sqrt{6{,}49} \approx 2{,}548$

EXERCICE 24 p. 326

Exercice résolu 2 Interpréter la notion d'espérance

Dans un jeu, une partie se déroule en deux étapes, dont chacune consiste à faire tourner la roue de loterie ci-contre.

À chaque étape, on gagne le nombre de chamallows indiqué par la flèche rouge.

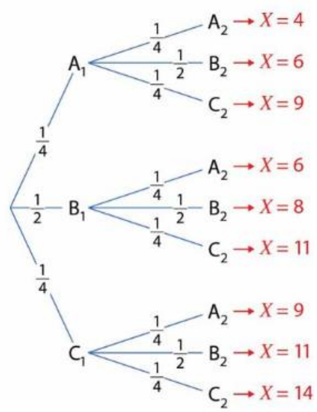
• Si on joue un très grand nombre de parties, combien peut-on espérer gagner, en moyenne, de chamallows par partie ?

Solution commentée

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de chamallows gagnés lors d'une partie.

On sait alors que $E(X)$ représente la moyenne recherchée. On détermine la loi de probabilité de X à l'aide d'un arbre pondéré.

On note A_1 l'évènement « On gagne 2 chamallows à la première étape », B_1 l'évènement « On gagne 4 chamallows à la première étape », et C_1 l'évènement « On gagne 7 chamallows à la première étape ». On définit de même A_2, B_2 et C_2 pour la deuxième étape.



$P(X=4) = P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$P(X=6) = P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2) = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(X=8) = P(B_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(X=9) = P(A_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap A_2) = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$P(X=11) = P(B_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap B_2) = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(X=14) = P(C_1 \cap C_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

On obtient la loi de probabilité de X.

x_i	4	6	8	9	11	14
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

$E(X) = 4 \times \frac{1}{16} + 6 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{8} + 11 \times \frac{1}{4} + 14 \times \frac{1}{16} = 8{,}5$

Si on joue un très grand nombre de parties, on peut espérer gagner, en moyenne, 8,5 chamallows par partie