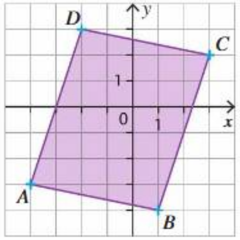
Exercice résolu 1 Calculer l'aire d'un parallélogramme

Soient les points $A(-4\,;-3)$, $B(1\,;-4)$, $C(3\,;2)$ et $D(-2\,;3)$ dans une base orthonormée d'unités graphiques 1 cm.

1. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculer son aire.

Solution commentée



1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-4)\\-4-(-3)\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3-(-2)\\2-3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées, donc ils sont égaux.
Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2-(-4)\\3-(-3)\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$.

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 5\times 6-(-1)\times 2 = 32$

L'aire de $ABCD$ est donc égale à 32 cm².

EXERCICE 14 p. 242

Exercice résolu 2 Établir la colinéarité de deux vecteurs

Dans une base orthonormée, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\vec{t}\begin{pmatrix}-8\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-8\\15\end{pmatrix}$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{t}$ sont-ils colinéaires ?
2. Même question pour $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

Solution commentée

1. $\det(\vec{u}, \vec{t}) = 2\times(-2)-\frac{1}{2}\times(-8) = -4+4 = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{t}$ sont colinéaires.

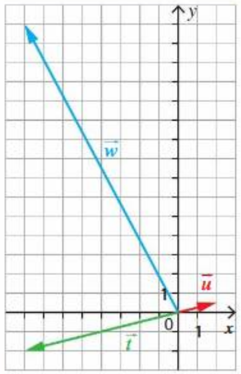
On aurait aussi pu remarquer que :

$$-8 = -4\times 2 \text{ et } -2 = -4\times\frac{1}{2}$$

donc que $\vec{u}$ et $\vec{t}$ sont colinéaires.

2. $\det(\vec{u}, \vec{w}) = 2\times 15-\frac{1}{2}\times(-8) = 30+4 = 34$

On a $\det(\vec{u}, \vec{w}) \neq 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont donc pas colinéaires.



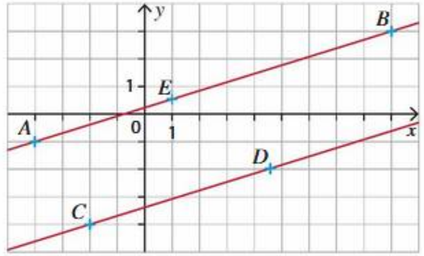
EXERCICE 11 p. 242

Exercice résolu 1 Étudier un parallélisme ou un alignement

Soient $A(-4\,;-1)$, $B(9\,;3)$, $C(-2\,;-4)$, $D\left(\frac{9}{2}\,;-2\right)$ et $E\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$ dans un repère orthonormé.

1. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
2. Le point E appartient-il à la droite (AB) ?

Solution commentée



1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9-(-4)\\3-(-1)\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}13\\4\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}-(-2)\\-2-(-4)\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}\frac{13}{2}\\2\end{pmatrix}$.

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 13\times 2-4\times\frac{13}{2} = 26-26 = 0$

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}13\\4\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1-(-4)\\\frac{1}{2}-(-1)\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}5\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = 13\times\frac{3}{2}-4\times 5 = \frac{39}{2}-20 = -\frac{1}{2}$.

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \neq 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et E ne sont donc pas alignés, le point E n'appartient pas à la droite (AB).

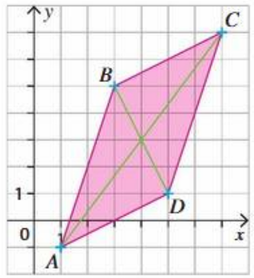
EXERCICE 18 p. 242

Exercice résolu 2 Déterminer les coordonnées du milieu d'un segment

Soient $A(1\,;-1)$, $B(3\,;5)$ et $C(7\,;7)$ et $D(5\,;1)$ dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AC]$ et du milieu J de $[BD]$.
2. Que peut-on en conclure pour le quadrilatère $ABCD$?

Solution commentée



1. $I\left(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\right)$, donc $I\left(\frac{1+7}{2}\,;\frac{-1+7}{2}\right)$, soit $I(4\,;3)$.

$J\left(\frac{x_B+x_D}{2}\,;\frac{y_B+y_D}{2}\right)$, donc $J\left(\frac{3+5}{2}\,;\frac{5+1}{2}\right)$, soit $J(4\,;3)$.

2. Les points I et J sont confondus, donc les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. Les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

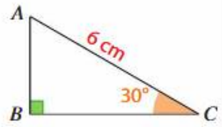
EXERCICE 21 p. 242

Exercice résolu 1 Calculer une longueur dans un triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en B tel que $AC = 6$ cm et $\widehat{BCA} = 30°$.

• Calculer la longueur AB.

Solution commentée



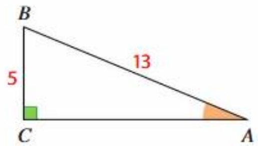
ABC est un triangle rectangle en B, donc $\sin(\widehat{BCA}) = \dfrac{AB}{AC}$.
On a donc $\sin(30°) = \dfrac{AB}{6}$, soit $AB = 6\sin(30°) = 3$.
On trouve donc $AB = 3$ cm.

EXERCICE 27 p. 243

Exercice résolu 2 Calculer un angle dans un triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en C tel que $BC = 5$ cm et $AB = 13$ cm.
• Que vaut, à 0,1° près, la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$?

Solution commentée



ABC est rectangle en C, donc $\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{5}{13}$.
La calculatrice donne $\widehat{BAC} \approx 22{,}6°$.

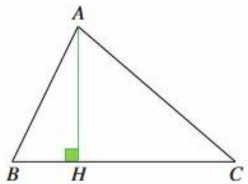
EXERCICE 28 p. 243

Exercice résolu 3 Utiliser un projeté orthogonal

Soient $[BC]$ un segment de longueur 5 cm et A un point situé à une distance de 3 cm de la droite (BC).

1. Réaliser une figure. Y a-t-il plusieurs possibilités pour le point A ?
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.

Solution commentée



1. Pour placer un point A qui répond au problème, on doit construire une perpendiculaire à la droite (BC), qui coupe (BC) en un point que l'on note H, puis placer un point A sur cette droite à 3 cm de H.
Il y a donc une infinité de possibilités pour le point A, car on peut tracer une infinité de perpendiculaires à (BC) et, pour chacune d'entre elles, il y a deux possibilités pour le point A.
2. L'aire du triangle ABC en cm² est égale à $\dfrac{AH \times BC}{2} = \dfrac{3 \times 5}{2} = 7{,}5$.

EXERCICE 38 p. 244

Rédiger une démonstration

1 On souhaite démontrer la propriété suivante.

> Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.
> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
- Traduire la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par des égalités.
- Traduire ces égalités avec des coordonnées.
- Conclure.

2 On souhaite démontrer la propriété suivante.

> Soient ABC un triangle rectangle en A et α un angle aigu de ce triangle.
> On a :
> $$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

En utilisant les indications suivantes, rédiger la démonstration de la propriété.
- Réaliser une figure et exprimer $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ en fonction des longueurs des côtés du triangle.
- Conclure.

Utiliser différents raisonnements

On considère le problème suivant : IJK est un triangle rectangle en K tel que cos (▯) $= \dfrac{3}{5}$.
Déterminer la valeur exacte de sin (▯).

1 Énoncer la propriété qui est la plus adaptée pour résoudre ce problème.

2 **a.** Quelles sont les hypothèses de cette propriété ?
b. Quelle est la conclusion de cette propriété ?

3 **a.** Montrer que les hypothèses de la propriété sont bien vraies dans le problème ci-dessus.
b. Quelle conclusion peut-on en tirer ?
c. Terminer la résolution du problème

> **Utiliser une propriété**
> Une propriété possède des **hypothèses** et une **conclusion**.
> Pour l'utiliser dans une démonstration, il faut **s'assurer que ses hypothèses soient vérifiées**, soit à l'aide des données de l'énoncé, soit à l'aide de ce qu'on a démontré dans les questions précédentes de l'exercice.
> On peut alors **affirmer que la conclusion de la propriété est vraie**.