Fonctions dérivées

a Notion de fonction dérivée

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable en tout réel a de I, on dit que f est **dérivable sur l'intervalle** I.

La fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivée $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée de** f (ou dérivée de f). On la note f'.

Exemple

On considère la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
f est dérivable en tout réel $x\in\mathbb{R}$ avec $f'(x)=2x$. La fonction $f':x\mapsto 2x$ est la fonction dérivée de la fonction carré.

b Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Propriété

Fonction	Fonction f	Fonction dérivée f'	f étant dérivable sur
Constante	$f(x)=k$ avec k constante réelle	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
Identité	$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
Affine	$f(x)=mx+p$ avec m, p constantes réelles	$f'(x)=m$	$\mathbb{R}$
Carré	$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
Inverse	$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$
Puissance	$f(x)=x^n$ où $n\in\mathbb{N}^*$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
	$f(x)=\frac{1}{x^n}$ où $n\in\mathbb{N}^*$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$
Racine carrée	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Opérations sur les dérivées (1)

a Dérivée d'une somme, d'un produit par une constante réelle

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I et k une constante réelle.

Propriété **Dérivée de $u+v$**

La fonction somme $u+v$ définie sur I par $x\mapsto u(x)+v(x)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a :

$$(u+v)'(x)=u'(x)+v'(x)$$

Propriété **Dérivée de ku**

La fonction ku définie sur I par $x\mapsto k\times u(x)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a :

$$(ku)'(x)=k\times u'(x)$$

Remarque : dérivée de la différence $u-v$

La fonction différence $u-v$ est dérivable sur I et, pour tout réel x, on a :

$$(u-v)'(x)=u'(x)-v'(x)$$

Opérations sur les dérivées (2)

b Dérivée du produit de deux fonctions

Propriété Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Alors la fonction produit $u\times v$ définie sur I par $x\mapsto u(x)\times v(x)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a :

$$(u\times v)'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$$

ou de manière simplifiée $(uv)'=u'v+uv'$.

Démo

Démonstration de la dérivée du produit

On considère la fonction $f=u\times v$; soit a un réel de l'intervalle I et h un réel non nul tel que $(a+h)$ appartient à I.

Le taux d'accroissement de f en a est :

$$\tau(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$$
$$=\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a+h)v(a)}{h}+\frac{u(a+h)v(a)-u(a)v(a)}{h}$$
$$=u(a+h)\times\frac{v(a+h)-v(a)}{h}+\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\times v(a)$$

Puisque u et v sont dérivables en a, alors :

$$\frac{u(a+h)-u(a)}{h} \text{ et } \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

tendent respectivement vers les réels $u'(a)$ et $v'(a)$ lorsque h tend vers zéro.

De plus, on admet que $u(a+h)$ tend vers $u(a)$ lorsque h tend vers 0.

Par les règles opératoires sur les limites (admises ici), on en déduit que $\tau(h)$ tend vers $u(a)v'(a)+u'(a)v(a)$ lorsque h tend vers 0.

Donc $f=u\times v$ est dérivable en a et on obtient :

$$f'(a)=(u\times v)'(a)=u'(a)\times v(a)+u(a)\times v'(a)$$

c Dérivée du quotient de deux fonctions

Propriété

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

On suppose que v ne s'annule pas sur l'intervalle I.

- La fonction inverse $\frac{1}{v}$, définie sur I par $x\mapsto\frac{1}{v(x)}$, est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, $\left(\frac{1}{v}\right)'(x)=-\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$.
- La fonction quotient $\frac{u}{v}$, définie sur I par $x\mapsto\frac{u(x)}{v(x)}$, est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, $\left(\frac{u}{v}\right)'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$.

On retiendra que $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Voir exercices Démo n° 27 et n° 67

Variations et extremums

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

a Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

Propriété (admise)

- La fonction f est croissante sur I si, et seulement si :
  pour tout réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$
- La fonction f est décroissante sur I si, et seulement si :
  pour tout réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$
- La fonction f est constante sur I si, et seulement si :
  pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$

Conséquence

Pour étudier les variations d'une fonction sur un intervalle I, on se ramène souvent à l'étude du signe de sa fonction dérivée sur I.
Pour cela, on procède selon l'enchaînement d'étapes suivant.
① Calcul de la fonction dérivée f'.
② Étude du signe de $f'(x)$ sur I.
③ Construction du tableau de variations de f sur I.
④ Calcul des images aux bornes de I, ainsi qu'aux éventuelles valeurs où l'on observe un changement de sens de variation de la fonction f.

b Extremums d'une fonction

Définition

- Le réel M est le maximum de f sur I s'il existe un réel a tel que $f(a) = M$ et, pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant M$.
  On dit alors que le **maximum** M de f sur I est atteint en a.
- Le réel m est le minimum de f sur I s'il existe un réel a tel que $f(a) = m$ et, pour tout réel x de I, $f(x) \geqslant m$.
  On dit alors que le **minimum** m de f sur I est atteint en a.
- On appelle **extremum** de f sur I le maximum ou le minimum de f sur I.
- On dit que le réel α est un **extremum local** de f sur l'intervalle I s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que α soit un extremum de f sur J.

Propriété Soit a un réel de l'intervalle I qui n'est pas une borne de I.

- Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
- Si la fonction dérivée f' <u>s'annule en a en changeant de signe</u> de part et d'autre de a, alors f admet un extremum local en a.

Les Méthodes

Énoncé Déterminer les fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f : x \mapsto -7x + 2$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
3. $g : x \mapsto \dfrac{-5}{x}$ sur $]-\infty\,;0[$
4. $h : x \mapsto \dfrac{x^3}{6} - 8x + 1$ sur $\mathbb{R}$
5. $i : x \mapsto x^2 + \dfrac{2}{3x^3}$ sur $]0\,;+\infty[$

Solution

1. On reconnaît f comme une fonction affine avec $m = -7$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -7$.

2. La fonction f est la somme de deux fonctions usuelles :

$$u : x \mapsto x^2 \text{ et } v : x \mapsto \sqrt{x}$$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier sur $]0\,;+\infty[$ et v est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ avec, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x \in\,]0\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2+\sqrt{x}}{2x}$$

3. La fonction g est le produit de la fonction inverse $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ par la constante $k = -5$. La fonction u est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et, pour tout réel $x < 0$, on a : $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Donc g est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et, pour tout réel $x < 0$, on a :

$$g'(x) = k \times u'(x) = -5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{5}{x^2}$$

4. La fonction h est de la forme $h = k \times u + v$ où $k = \dfrac{1}{6}$.

u est la fonction cube $u : x \mapsto x^3$ et v est la fonction affine $v : x \mapsto -8x + 1$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc h également et, pour tout réel x, on a :

$$h'(x) = k \times u'(x) + v'(x) = \frac{1}{6} \times (3x^2) + (-8) = \frac{1}{2}x^2 - 8$$

5. La fonction i est la somme des fonctions u et v définies par $u(x) = x^2$ et $v(x) = \dfrac{2}{3x^3} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{x^3}$. u et v sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ donc il en est de même pour la fonction i et, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$i'(x) = u'(x) + v'(x) = 2x + \frac{2}{3} \times \frac{-3}{x^4} = 2x - \frac{2}{x^4}$$

Énoncé Déterminer les fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f : x \mapsto x^2\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ **2.** $g : x \mapsto \dfrac{5}{x^4 - x}$ sur $]1\,;+\infty[$

3. $h : x \mapsto \dfrac{x^2+3x-1}{2x+4}$ sur $]-\infty\,;-2[$ **4.** $j(x)=(7x+1)^3$ sur $\mathbb{R}$

Solution

1. La fonction f est le produit des fonctions $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$ toutes deux dérivables sur $]0\,;+\infty[$ avec, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$u'(x)=2x \text{ et } v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

$$=2x\sqrt{x}+x^2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{4x\left(\sqrt{x}\right)^2+x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}$$

2. La fonction g est de la forme $k\times\dfrac{1}{v}$ où $k=5$ et v est la fonction définie par $v : x \mapsto x^4-x$.

La fonction v est dérivable et ne s'annule pas sur $]1;+\infty[$ et, pour tout $x>1$, on a $v'(x)=4x^3-1$. Par conséquent, la fonction g est dérivable sur $]1;+\infty[$ et, pour tout réel $x>1$, on a :

$$g'(x)=5\times\frac{-v'(x)}{(v(x))^2}=5\times\frac{-4x^3+1}{\left(x^4-x\right)^2}=\frac{-20x^3+5}{\left(x^4-x\right)^2}$$

3. La fonction h est le quotient des fonctions u et v définies par :

$$u : x \mapsto x^2+3x-1 \text{ et } v : x \mapsto 2x+4$$

La fonction u est une somme algébrique de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc u est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x)=2x+3$. D'autre part, v est une fonction affine, donc v est également dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $v'(x)=2$.

Enfin, v ne s'annule pas sur $]-\infty\,;-2[$, donc h est dérivable sur $]-\infty\,;-2[$ et, pour tout réel $x<-2$, on a :

$$h'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\frac{(2x+3)(2x+4)-\left(x^2+3x-1\right)\times 2}{(2x+4)^2}$$

$$=\frac{2x^2+8x+14}{(2x+4)^2}=\frac{2\left(x^2+4x+7\right)}{2^2(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+7}{2(x+2)^2}$$

4. La fonction j est la composée de la fonction affine $u : x \mapsto 7x+1$ où $a=7$ par la fonction $g : x \mapsto x^3$ toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. On a $g'(x)=3x^2$.

Donc j est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a :

$$j'(x)=7\times 3(7x+1)^2=21(7x+1)^2$$

Énoncé Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[-2\,;4]$ par $f(x)=2x^3-3x^2-12x+6$.

1. Étudier les variations de f sur I.

2. En déduire les extremums de f sur I.

Solution

1. On étudie le signe de la fonction dérivée f'.

① **Calcul de la fonction dérivée**

On a, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2\times 3x^2-3\times 2x-12\times 1+0=6x^2-6x-12$.

② **Étude du signe de la fonction dérivée**

f' est un trinôme du second degré admettant pour discriminant $\Delta=324$ et donc $x_1=-1$ et $x_2=2$ pour racines.

On obtient donc le tableau de signes suivant.

x	-2		-1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

③ **Construction du tableau de variations**

Dans le tableau de variations, on inclut une première ligne précisant le signe de la dérivée f' : on en déduit, en dessous, les conséquences pour les variations de f.

x	-2		-1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	13	$\searrow$	-14	$\nearrow$	38

④ **Calcul des images par f**

On intègre ces valeurs au tableau de variations.

$f(-2)=2$ $f(-1)=13$ $f(2)=-14$ $f(4)=38$

2. D'après le tableau de variations, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;4]$:

• $f(x)\leqslant 38$ et $f(4)=38$. Ainsi, le maximum de f sur $[-2\,;4]$ est 38, atteint pour $x=4$.

• $f(x)\geqslant -14$ et $f(2)=-14$. Ainsi, le minimum de f sur $[-2\,;4]$ est -14, atteint pour $x=2$.

Par ailleurs, la dérivée s'annule en changeant de signe en -1.

Ainsi, 13 est un maximum local de f.

On vérifie les résultats en traçant la représentation graphique de f sur $[-2\,;4]$.

Énoncé **Optimiser une surface**

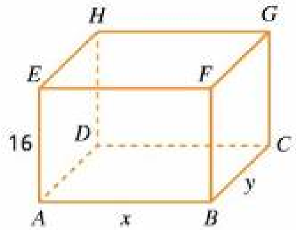
Un vase en verre a la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur 16 cm. Ce vase a une contenance de 900 cm^3.
Quelles dimensions doit-on donner à ce vase pour qu'il ait une surface en verre minimale ? Justifier.

Solution

① Interprétation des contraintes

En notant x et y les dimensions, en cm, du rectangle de base de ce vase, son volume V s'exprime par $V = 16xy$ or $V = 900\,\text{cm}^3$ d'où $16xy = 900$ soit $y = \frac{900}{16x} = \frac{225}{4x}$. La surface en verre de ce vase est alors égale à :

$$\begin{aligned} A(x) &= A_{ABCD} + 2A_{ABFE} + 2A_{BCGF} \\ &= xy + 2\times 16x + 2\times 16y \\ &= \frac{900}{16} + 32x + 32\times\frac{225}{4x} \\ &= \frac{900}{16} + 32x + \frac{1800}{x} \end{aligned}$$



② Étude des variations et des extremums éventuels de A

Compte tenu du problème modélisé, le réel x est strictement positif. On étudie alors les variations de A sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Cette fonction est dérivable sur cet intervalle et, pour tout réel $x > 0$, on a :

x	0		$7,5$		$+\infty$
Signe de $32x^2 - 1800$		$-$	0	$+$	
Signe de x^2	0	$+$		$+$	
Signe de $A'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de A	‖	↘	$A(7,5)$	↗	

$$A'(x) = 32 - \frac{1800}{x^2} = \frac{32x^2 - 1800}{x^2}$$

Ainsi, après étude du signe de cette dérivée, on peut déduire les variations de A.

③ Retour au problème et conclusion

Le vase a une surface en verre minimale lorsque $x = 7,5\,\text{cm}$. On a alors $y = \frac{225}{4x} = \frac{225}{4\times 7,5} = 7,5\,\text{cm}$. Dans ce cas, le vase a une base carrée de côté 7,5 cm et de hauteur 16 cm.

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [-13;2]$ par $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x^2 + 6}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle I.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur I et en déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. a. Montrer que, pour tout réel $x \in \mathrm{I}$, $-2 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{3}$.

b. Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Solution

1. La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
Elle est donc dérivable sur I.

On pose $\begin{cases} u(x) = -2x^2 + x + 1 \\ v(x) = x^2 + 6 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = -4x + 1 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

On obtient, pour tout réel x de I :

$$f'(x) = \frac{(-4x+1)\times(x^2+6) - (-2x^2+x+1)\times(2x)}{(x^2+6)^2} = \frac{-x^2 - 26x + 6}{(x^2+6)^2}$$

2. Étude du signe de $f'(x)$ sur I

Pour tout réel x de I, on a : $(x^2+6)^2 > 0$. D'autre part, le trinôme $-x^2 - 26x + 6$ admet deux racines réelles : $x_1 = -13 + 5\sqrt{7}$ et $x_2 = -13 - 5\sqrt{7}$ et $x_2 \notin [-13;2]$.

On déduit alors le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur I.

On obtient le tableau de signes et de variations ci-contre avec $f(-13) = -2$, $f(2) = -\frac{1}{2}$ et $f(-13+5\sqrt{7}) \approx 0,19$.

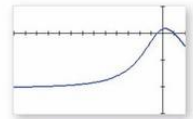
x	-13		$-13+5\sqrt{7}$		1		2
Signe de $-x^2 - 26x + 6$		$+$	0		¦	$-$	
Signe de $(x^2+6)^2$		$+$			¦	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0		¦	$-$	
Variations de f	-2	↗	$f(-13+5\sqrt{7})$	↘	0	↘	$-0,5$

3. a. Du tableau de variations de f précédent, on déduit que pour tout réel x de $[-13;2]$, $-2 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{3}$.

b. Comme $-13 + 5\sqrt{7} < 1$, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1;2]$ donc si $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $f(2) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$. De plus, $f(1) = 0$ et $f(2) = -0,5$ d'où $-0,5 \leqslant f(x) \leqslant 0$.

Point méthode

On veut vérifier le tableau de variations à l'aide de la calculatrice :



Point méthode

3. En exploitant le tableau de variations d'une fonction f, on peut déterminer suivant les valeurs de x, un encadrement des images $f(x)$.