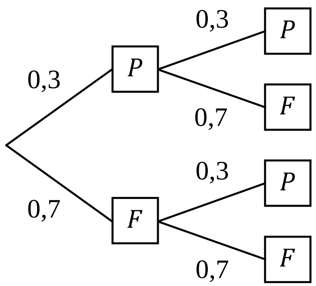
Loi binomiale en STMG

On répète n fois de suite la même expérience, à deux issues possibles

- Succès, de probabilité p ;
- Échec, de probabilité $1 - p$.

On peut représenter cette situation, appelée <u>schéma de Bernoulli de paramètres n et p</u>, par un arbre.



Exemple

On lance deux fois de suite une pièce truquée qui amène pile avec une probabilité 0,3.

Définition. *Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli de paramètre $(n; p)$. La loi de X est appelée <u>loi binomiale</u> de paramètres $(n; p)$.*

Exemple

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de piles obtenus quand on lance deux fois la pièce. Les valeurs possibles de X sont 0, 1 ou 2. On a

- $P(X = 0) = 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$;
- $P(X = 1) = 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}42$;
- $P(X = 2) = 0{,}3^2 = 0{,}09$.

La probabilité de l'événement « obtenir au moins un pile » est $0{,}42 + 0{,}09 = 0{,}51$, ou encore $1 - 0{,}49 = 0{,}51$.

Étant donné une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $(n; p)$, le menu `Distrib` de la calculatrice, obtenu en faisant $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{var}}$, permet de calculer :

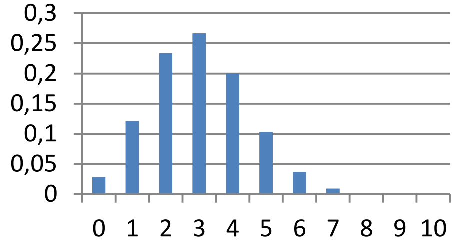
- $P(X = k)$, c'est-à-dire la probabilité d'avoir exactement k succès, par la commande `binomFdp(n,p,k)`
- $P(X \leq k)$, c'est-à-dire le probabilité d'avoir au plus k succès, par la commande `binomFrép(n,p,k)`
- $P(X \geq k)$, c'est-à-dire la probabilité d'avoir au moins k succès, en utilisant la formule $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$.

Exemple

On lance 10 fois de suite la pièce précédente.

1. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 4 piles.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins 3 faces, puis au moins 6 piles.

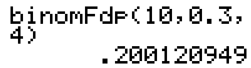
Réponse. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de piles obtenues sur les 10 lancers. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}3$. On donne ci-contre le diagramme en bâtons de la loi de X.



1. On doit calculer $P(X = 4)$. La commande

   `binomFdp(10,0.3,4)`

   permet d'effectuer ce calcul.



2. L'événement « obtenir au moins trois faces » est $(X \leq 7)$. Il se calcule à l'aide la commande `binomFrép(10,0.3,7)`.

   L'événement contraire de $(X \geq 6)$ est $(X \leq 5)$, donc

   $$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$$

   et la calculatrice permet de conclure.

Espérance de la loi binomiale

Théorème. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Alors $E(X) = np$.

Exemple

L'espérance de X est $10 \times 0{,}3 = 3$. Cela signifie que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience consistant à lancer 10 fois la pièce, on obtiendra une moyenne de 3 piles à chaque expérience.

Exercice La population française compte 12 % de gauchers. On choisit 35 personnes au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :

- $A =$ « exactement 5 personnes sont gauchers » ;
- $B =$ « au plus 2 personnes sont gauchers » ;
- $C =$ « il y a plus de 5 gauchers ».